

Уравнения математической физики

М.Д. Малых

Курс лекций, прочитанных в 2012/13 уч. г. на факультете наук о
материалах МГУ.

Версия от 10 июня 2012 г.

Оглавление

1	Начально-краевые задачи на отрезке	4
1.1	Колебания струны	4
1.1.1	Уравнение, описывающее поперечные колебания струны	4
1.1.2	Собственные колебания	9
1.1.3	Метод Фурье	11
1.1.4	Возбуждение струны ударом	14
1.1.5	Возбуждение струны щипком	20
1.1.6	Спектральный состав звука, издаваемого струнами .	24
1.1.7	Корректная постановка начально-краевой задачи о колебании струны	29
1.1.8	Уравнение колебаний на бесконечной прямой, форму- ла Даламбера	33
1.1.9	Сведение задачи на отрезке к задаче на прямой . . .	39
1.2	Общая схема метода Фурье	45
1.3	Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности на отрезке	49
1.3.1	Задача о распределении температуры вдоль стержня	49
1.3.2	Примеры начально-краевых задач	51
1.3.3	Начальные задачи на прямой, формула Пуассона . .	52
2	Уравнения Лапласа	56
2.1	Стационарное распределение температуры в теле	56
2.2	Первая краевая задача для уравнения Лапласа	58

2.2.1	Первая краевая задача в круге	60
2.2.2	Первая краевая задача в прямоугольнике	65
2.3	Вторая краевая задача для уравнения Лапласа	68
2.3.1	Вторая краевая задача в круге	69
2.4	Третья краевая задача для уравнения Лапласа	73
2.4.1	Третья краевая задача в круге	75
3	Метод конечных элементов на примере первой краевой задачи для уравнения Пуассона	78
3.1	Описание метода	80
3.2	Примеры	85
3.2.1	Краевая задача в прямоугольнике	85
3.2.2	Краевая задача в треугольнике	88
3.3	Обоснование метода конечных элементов	88
3.3.1	Сведение оценки ошибки метода конечных элементов к оценке ошибки аппроксимации	90
3.3.2	Ошибка аппроксимации	93
3.3.3	Неравенство Каччиополи-Ладыженской	94
3.3.4	Итоговая теорема	97
4	Собственные колебания мембраны	100
4.1	Поперечные колебания мембраны и задача на собственные значения	100
4.2	Свойства собственных функций и собственных значений	102
4.3	Вычисление собственных значений методом конечных элементов	105
4.4	Первое собственное значение	107
4.4.1	Первое собственное значение круга	107
4.4.2	Первое собственное значение прямоугольника	115
4.4.3	Первая собственная функция равностороннего треугольника	118

4.4.4	Неравенства Релея	120
4.5	Старшие собственные значения	121
4.5.1	Собственные значения круга	122
4.5.2	Собственные функции прямоугольника	130
4.6	Возбуждение колебаний	133
4.6.1	Возбуждение мембраны ударом и щипком	135
4.6.2	Возбуждение мембраны периодически меняющейся силой	142
5	Первая краевая задача для уравнения Пуассона	147
5.1	Разложение по собственным функциям	147
5.2	Функция Грина и задача о заземленной полости	150
5.2.1	Функция Грина для шара	153
5.3	Функция Грина и задача о заземленной цилиндре	154
5.4	Решение первой краевой задачи для уравнения Пуассона . .	157
5.5	Первая краевая задача для уравнения Лапласа	158
6	Сферические функции	161
6.1	Особые точки линейных дифференциальных уравнений . . .	161
6.2	Задача о колебаниях сферы	162
6.3	Общие свойства собственных функций	163
6.4	Собственные функции, зависящие только от θ	164
6.4.1	Аналитические свойства собственных функций	164
6.4.2	Ортогональные полиномы	168
6.4.3	Полиномы Лежандра	169
6.5	Сферические функции	171

Глава 1

Начально-краевые задачи на отрезке

1.1 Колебания струны

1.1.1 Уравнение, описывающее поперечные колебания струны

Возьмем струну плотности ρ , поперечное сечение которой имеет площадь S , и натянем ее между двумя неподвижными точками A и B , расстояние между которыми будет равно l . В музыкальных инструментах струны натягивают, поворачивая колки, но когда желают выразить натяжение числом, в одной из точек помещают блок, через который перекидывают струну и подвешивают к ней груз, вес которого T принимают за меру натяжения. Если в начальный момент времени отклонить струну от положения равновесия или ударить, то струна придет в поперечные колебания, а мы при

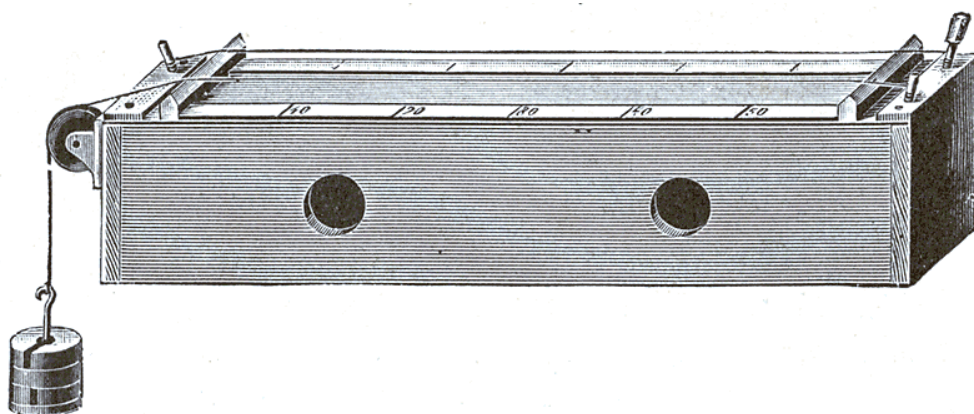


Рис. 1.1: Монохорд.

этом будем слышать звук.

Согласно басне, переданной ЯМВЛИХОМ¹, зависимость высоты звука от натяжения струны была изучена опытным путем и выражена в пропорциях ПИФАГОРОМ; это открытие можно было бы считать древнейшим открытием опытной и математической физики, если бы зависимость, указанная в этой басне, была бы верной. На самом же деле, зависимость высоты струны от ее параметров действительно опытным путем была изучена лишь в XVII веке МАРЕНОМ МЕРСЕНОМ (Mersenne, 1636) и оказалась, что частота ν колебаний струны пропорциональна величине

$$\sqrt{\frac{T}{S\rho l}},$$

в басне же ЯМВЛИХА выходило, что частота прямо пропорциональна T .

Теоретический вывод этой зависимости представляет ряд трудностей, характерных для математической физики в целом. Рассматриваемый объект, в данном случае струна, как и законы его движения, в данном случае закон Гука и 3 закона Ньютона, имеют словесные формулировки, а нам нужно превратить их в математические формулы. При этом как правило выясняется, что словесное определение слишком неформально, а для постановки корректной задачи нужно сделать целый ряд дополнительных предположений разной степени физической осмысленности.

Направим ось Ox по \vec{AB} , выбрав A за начала координат, а ось y направим в плоскости колебаний струны. Тогда точка струны, имевшая в начальный момент времени координату $(x, 0)$, переместится в точку, координаты которой можно представить так $(x, u(x, t))$. Уже здесь мы делаем *первое предположение*, состоящее в том, что точка струны не меняет со временем своей абсциссы, а, следовательно, *струна совершает только поперечные колебания*. Мы полностью опишем движение струны, если найдем эту функцию u . Для того, чтобы как-то приложить к ней законы механики, нужно вспомнить, что такое струна.

¹Ямвлих. О Пифагоровой жизни. Пер. с древнегреч. И.Ю. Мельниковой. М.: Алетейа, 2002. Гл. XXVI.

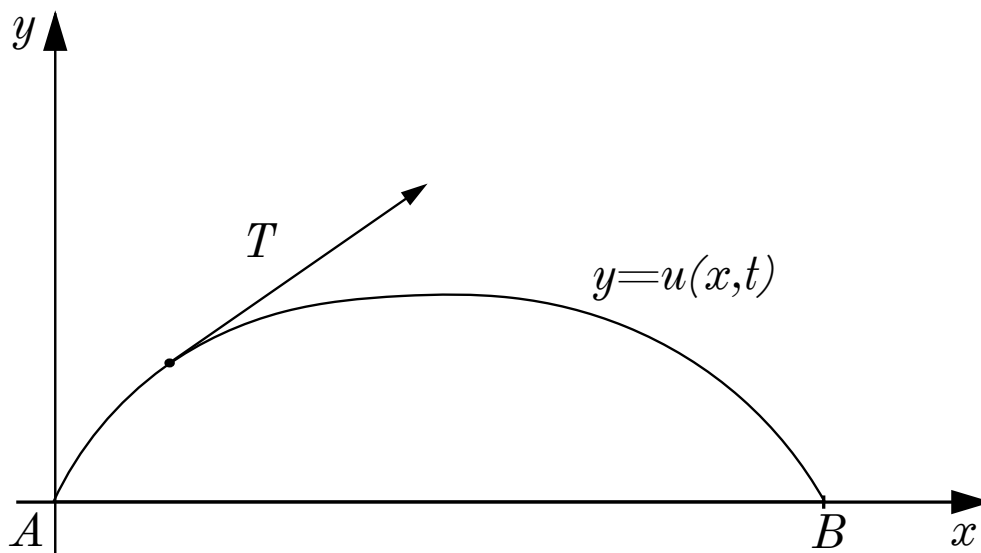


Рис. 1.2: Мгновенный профиль струны

Обычно *струну* определяют как *гибкую нить*, О.Д. ХВОЛЬСОН входит в большие подробности:

Струной в теории называется твердое нитевидное тело, площадь поперечного сечения которого вообще мала сравнительно с его длиной, и которое вовсе не сопротивляется изгибанию, так что изменение его формы, сохраняющее его длину, не вызывает в нем никаких упругих сил.

Математическое выражение понятия *гибкости* заключается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательным к ее мгновенному профилю (см. рис. 1.2).

Это позволяет выразить направления напряжений в каждой точке мгновенного профиля струны через u . В самом деле, мгновенный профиль описывается уравнением $y = u(x, t)$, поэтому тангенс угла наклона касательной в точке x , скажем $\tan \alpha$, равен u_x , поэтому

$$u_x^2 = \tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$$

откуда в предположении малости u_x^2 относительно единицы

$$\sin^2 \alpha = \frac{u_x^2}{1 + u_x^2} = u_x^2 + \dots$$

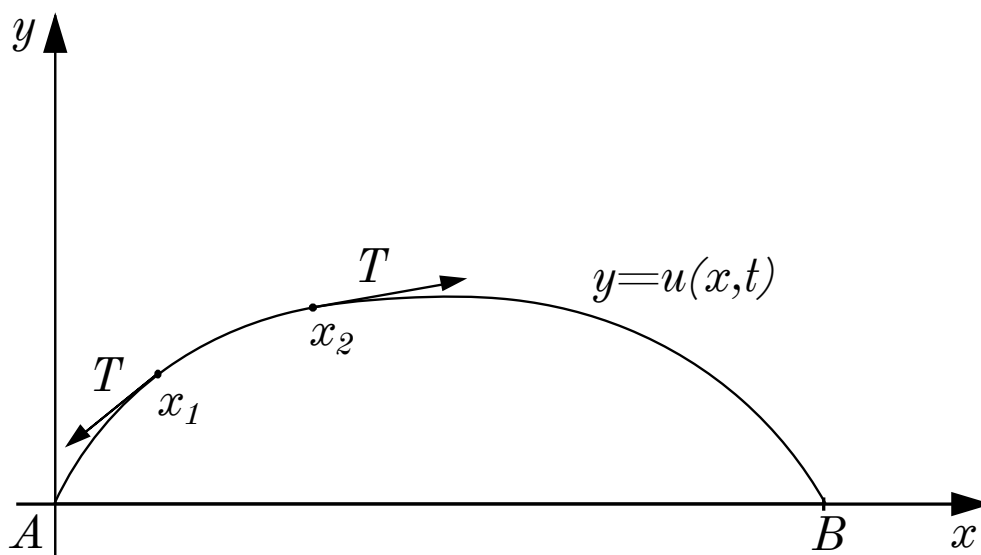


Рис. 1.3: К описанию движения куска струны

Это означает, что сделав *второе предположение о малости колебаний*, можно принять, что

$$\sin \alpha = u_x, \quad \cos \alpha = 1.$$

Сами напряжения будем характеризовать натяжением T , то есть модулем силы, с которой кусок струны, бывшей в начальный момент времени между точками с абсциссами $x = 0$ и $x = x$, действует на оставшийся кусок струны. Вообще говоря, натяжение может зависеть и от начального положения x конца куска и от его перемещения, то есть от t . Однако, величина натяжения, возникающего вследствие упругости, должна описываться *законом Гука*, то есть зависеть изменения длины рассматриваемого куска струны. Но эта длина равна

$$\int_0^x \sqrt{1 + u_x^2} dx = x + \dots,$$

то есть натяжение T может зависеть разве только от x . Небезынтересно заметить, что без предположения о малости колебаний, закон Гука не дал бы сколько-нибудь обзримого следствия.

Рассмотрим теперь движение куска струны, заключенного в начальный момент времени между точками с абсциссами $x = x_1$ и $x = x_2$, к концам

которого приложены силы натяжения (см. рис. 1.3), длины и направления которых мы только что описали. Поскольку мы рассматриваем только поперечные колебания, этот кусок не должен двигаться вдоль оси абсцисс, а значит, сумма проекций этих сил на ось Ox должна быть равна нулю, то есть

$$T(x) \cos \alpha|_{x=x_1} = T(x) \cos \alpha|_{x=x_2},$$

откуда в предположении о малости колебаний

$$T(x_1) = T(x_2),$$

а это означает, что натяжение не зависит и от x . Таким образом, применение 2-го закона Ньютона по оси абсцисс дало нам, что *натяжение постоянно вдоль струны*.

Остается записать 2-ой закон Ньютона для оси ординат. Заменяя, как обычно, в определении импульса сумму по всем телам на интеграл по всем точкам рассматриваемого куска, видим, что проекция его импульса на ось y равна

$$S \int_{x_1}^{x_2} \rho u_t dx,$$

а в силу 2-го закона Ньютона, скорость ее изменения равна проекции сил на ось Oy , то есть

$$S \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho u_t dx = T[u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)];$$

Замечая, что

$$T[u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)] = \int_{x_1}^{x_2} T u_{xx} dx,$$

и

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho u_t dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho u_{tt} dx,$$

сразу имеем

$$\int_{x_1}^{x_2} [S\rho u_{tt} - Tu_{xx}] dx = 0.$$

В силу произвольности выбор точек x_1 и x_2 это равенство возможно только тогда, когда ²

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T}{S\rho}}.$$

Это и есть уравнение Ньютона, описывающее движение струны. Заметим, что это уравнение – уравнение в частных производных 2-го порядка; его, по понятным причинам, называют уравнением колебаний.

Дом. задание. Рассмотрите продольные колебания стержня, один конец которого закреплен, а второй свободен. Докажите, что смещение и в этом случае удовлетворяет уравнению колебаний. Какое граничное условие можно поставить на свободном конце?

1.1.2 Собственные колебания

Разыщем теперь решения уравнения колебаний, гармонически зависящие от времени, то есть такие, которые можно представить в виде

$$u = u(x) \sin \omega t + \theta,$$

где ω – круговая частота колебания, а θ – его фаза. Подставляя это выражение в уравнение колебаний, получим

$$u'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 u = 0.$$

Это – однородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка, его общим решением является

$$u = C_1 \sin \frac{\omega}{a} x + C_2 \cos \frac{\omega}{a} x.$$

²Здесь мы использовали след. теорему: если интеграл от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f по любому интервалу, лежащему в $[a, b]$, равен нулю, то и сама функция равна нулю. Доказательство очень простое. Допустим противное, что в некоторой точке $x = c$ эта функция не равна нулю. Тогда в силу непрерывности имеется малая окрестность точки $x = c$, в которой эта функция имеет тот же знак. Интегрируя по этой окрестности никак нельзя получить нуль.

Одну из константы интегрирования C_1 и C_2 легко отыскать из того условия, что концы струны закреплены, то есть

$$u(0) = u(l) = 0.$$

Подставляя в общее решение $x = 0$, сразу получаем $C_2 = 0$. Условие $u(l) = 0$ не позволяет отыскать вторую константу, но налагает условие на частоту колебаний:

$$\sin \frac{\omega l}{a} = 0,$$

откуда

$$\omega = \pi \frac{a}{l} n = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{S\rho}} n,$$

где n может принимать любое целое значение. Таким образом, поперечные колебания струны, гармонически зависящие от времени, возможны лишь при дискретном наборе частот

$$\nu_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{Sl^2\rho}} n,$$

где n может принимать любые натуральные значения, эти частоты называют *собственными частотами* струны.

Гармонические колебания, возникающие при собственных частотах, называют *собственными модами* или *гармониками*³. Мгновенный профиль струны n -ой моды имеет весьма приметный вид

$$y = C \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \omega_n t,$$

где C – оставшаяся неопределенной константа, и, следовательно, на струне имеется ровно n *пучностей*, между которыми лежат $n - 1$ неподвижных точек, именуемых *узлами*.

В частности, единственная мода, не имеющая узловых точек, отвечает первой (наименьшей) собственной частоте

$$\nu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{Sl^2\rho}}.$$

³Различие этих терминов будет проведено в след. главах.

Это и есть в точности формула, найденная МЕРСЕНОМ (Mersenne, 1636) опытным путем для частоты колебания струны.

Прежде, чем выяснить физический смысл старших мод, посмотрим на математическую сторону рассмотренной только что задачи.

Краевая задача

$$\{u'' + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(l) = 0 \quad (1.1)$$

имеет нетривиальные⁴ решения u только при дискретном наборе значений параметра λ , именуемых *собственными значениями* этой задачи, а именно

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}, \quad \lambda_2 = \lambda_1 2^2, \dots$$

Каждому собственному значению λ_n отвечает решение $u = C \sin \pi n x$, определенное с точностью до мультипликативной константы C , это решение, в котором обычно опускают константу, называют *собственной функцией*. Наконец, задача об отыскании тех значений λ , при которых имеются нетривиальные решения u у системы (1.1), называется *задачей на собственные значения*.

Дом. задание. Проверьте, что изложенный метод годится и для решения задач, в которых вместо граничных условий $u(0) = u(l) = 0$ используются 1.) $u(0) = u'(l) = 0$ или 2.) $u'(0) = u'(l) = 0$. Обратите внимание на то, что в последнем случае появляется нулевое собственное значение. Ср. [2], стр. 27, №2,3.

1.1.3 Метод Фурье

При возбуждении колебаний в начальный момент времени либо отклоняют струну от положения равновесия, либо придают ей начальную скорость при помощи удара. Поэтому естественно попытаться найти по заданными начальному профилю струны

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

и начальному распределению скоростей

$$u_t|_{t=0} = \psi(x)$$

⁴т.е. отличные от нуля

мгновенный профиль струны $y = u(x, t)$ при всех $t > 0$.

Еще в начале XIX века возникла идея, обычно связываемая с именем Фурье, искать u как суперпозицию нормальных мод

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t] \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где A_n и B_n подлежащие определению константы. В те времена с бесконечными суммами работали так, как будто они конечные, не беспокоясь о сходимости. Заметив же, что нормальные моды

$$[A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t] \sin \frac{\pi n}{l} x$$

по отдельности удовлетворяют волновому уравнению, считали очевидным, что тоже верно и для их суммы. Подставив эту же сумму в начальные условия, получили, что константы A_n и B_n следует подобрать так, чтобы при всех $0 \leq x \leq l$ выполнялись равенства

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

и

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n A_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

В те времена это выглядело очень странно, ведь здесь написано, что произвольную функцию φ можно представить в виде суммы синусов. Возникшая было дискуссия вокруг возможности разложения произвольной функции в ряд, привела к созданию теории рядов Фурье. Теорема о разложении в ряд Фурье, которая в курсе Анализа излагается применительно к периодическим функциям, может быть приспособлена к разложению функций, заданных на отрезке, следующим образом.

Произвольную функцию f , заданную и непрерывную на отрезке $0 \leq x \leq l$, всегда можно продолжить нечетно на отрезок $-l \leq x \leq 0$. Если к тому же эта функция обращается в нуль при $x = 0$, то продолжение не будет иметь разрыва в точке $x = 0$. Зная функцию на отрезке $-l \leq x \leq l$,

ее можно продолжить до функции, имеющей период $2l$. Эта функция не будет иметь разрывов при $x = \pm l$, если $f(l)$, а следовательно, и $f(-l)$ равны нулю. По известной теореме из теории рядов Фурье произвольную $2l$ -периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье. При этом приходится накладывать некоторые мало чувствительные для задач математической физики ограничения на функции. Достаточно просто потребовать, чтобы на отрезке $0 < x < l$ функция имела ограниченную производную.⁵ В итоге получается след. теорема:

Теорема 1 (о разложении в ряд Фурье). Произвольную функцию f , первая производная которой непрерывна на отрезке $0 \leq x \leq l$ и которая сама удовлетворяет граничным условиям

$$f(0) = f(l) = 0,$$

можно разложить в ряд Фурье по синусам

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (0 \leq x \leq l),$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Остается заметить, что струна закреплена в точках $x = 0$ и $x = l$, и следовательно, начальные отклонения, как и начальные скорости в этих точках равны нулю

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Поэтому функции φ и ψ можно представить в виде рядов по синусам

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

⁵См. признак Липшица, [ФГМ], т. 3, п. 684.

и

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

а искомые коэффициенты A_n и B_n выражаются через их коэффициенты Фурье

$$B_n = \varphi_n, \quad A_n = \frac{\psi_n}{\omega_n}.$$

Итог сформулируем так: для того, чтобы по заданному начальному профилю струны и начальному распределению ее скоростей

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x)$$

найти мгновенный профиль струны $y = u(x, t)$ при всех $t > 0$, следует вычислить коэффициенты Фурье функций для φ и ψ по формулам

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx$$

и собственные частоты

$$\omega_n = \frac{\pi a}{l} n,$$

а затем записать ответ в виде ряда по нормальным модам

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_n}{\omega_n} \sin \omega_n t + \varphi_n \cos \omega_n t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (1.2)$$

Сам способ, при котором решение ищут в виде суперпозиции нормальных мод, называют *методом Фурье*.

1.1.4 Возбуждение струны ударом

При игре на ударных музыкальных инструментах (напр., рояле) по струне ударяют молоточком, то есть сообщают небольшому куску струны в начальный момент времени некоторую начальную скорость. Простейший способ описать эту ситуацию, принять

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \begin{cases} v, & |x - c| < \delta \\ 0, & |x - c| > \delta \end{cases}$$

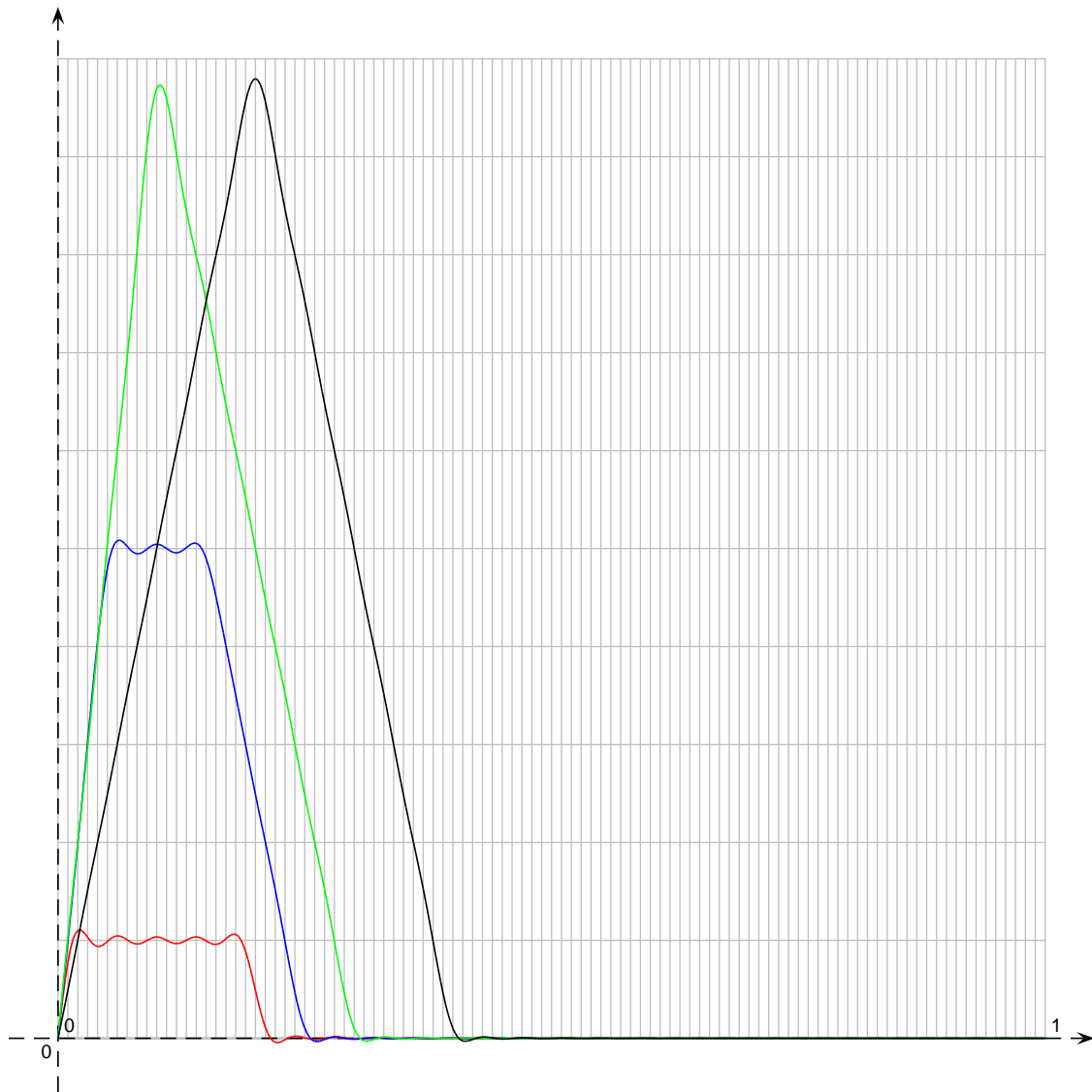


Рис. 1.4: Мгновенные профили струны длины при ударе молоточком толщины в $2\delta = 0.2l$ в точку $c = l/10$ при малых t : $t = 0.01l/a$ (красный), $t = 0.05l/a$ (синий), $0.1l/a$ (зеленый) и $t = 0.2l/a$ (черный).

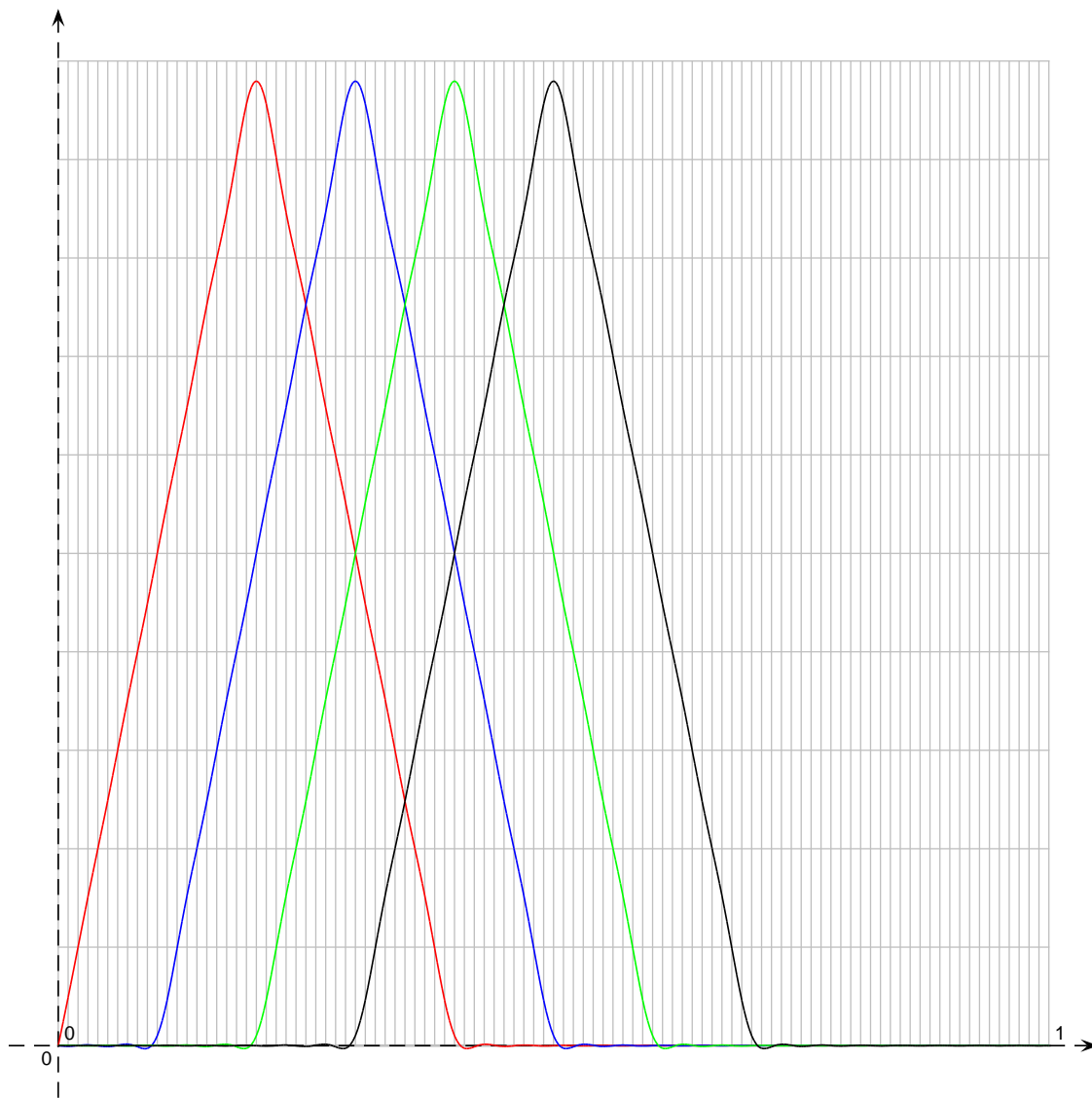


Рис. 1.5: Мгновенные профили струны при ударе молоточком толщины в $2\delta = 0.2l$ в точку $s = l/10$ за первую четверть периода ее колебаний: $t = 0.2l/a$ (красный), $t = 0.3l/a$ (синий), $0.4l/a$ (зеленый) и $t = 0.5l/a$ (черный).

Используя любую систему компьютерной алгебры совсем нетрудно построить график решение по способу Фурье, изложенному в прошлом параграфе. Напр., мультфильм, показывающий движение струны в Giac/Xcas⁶, можно сделать так:

```

[1] restart;
[2] l:=1; a:=1; c:=l/10; delta:=0.1; v:=1;
[3] psi:=piecewise(x<c-delta,0,x<c+delta,v,0);
[4] assume(n,integer); psin:=simplify(2/l*int(psi*sin(Pi*n*x/l),x=0..1));
[5] u:=sum(psin*sin(Pi*n*x/l)*sin(Pi*n*a*t/l)*(Pi*n*a/l)^(-1),n=1..50); 7
[6] animate(u,x=0..1,t=0..2*l/a,frames=20); 8

```

Ход получившегося решения можно описать так: при малых t в месте удара быстро возникает горб (см. рис. 1.4), который движется через центр струны к противоположному ее концу со скоростью a (см. рис. 1.5), от него отражается, опрокидывается, возвращается назад и снова опрокидывается. Здесь, конечно, следует отметить чрезмерную гибкость струны, подобным образом ведет себя, пожалуй, слабо натянутая над аудиторией длинная резинка в классическом эксперименте.

С классической точки зрения, применение метода Фурье к этой задаче осложнено проблемами со сходимостью рядов. В самом деле, для вычисления коэффициентов Фурье функции ψ имеем

$$\psi_n = \frac{2}{l} \int_{c-\delta}^{c+\delta} v \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{4v}{\pi} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n c}{l} \sin \frac{\pi n \delta}{l},$$

⁶Giac – мультиплатформенная система компьютерной алгебры, разработанная Бернаром Парисом (B. Parisse) в Институте Фурье, доступна под GNU General Public License, см. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html>. Xcas – графическая оболочка для нее под Linux.

⁷Giac различает переменные и функции. В [5] задана переменная u , чтобы вычислить ее в точке $(x, t) = (1, 2)$ следует вводить `subst(u, x=1, t=2)`, а не `u(1, 2)`. Для задания u как функции следовало написать

```
[5] u(x,t):=sum(psin*sin(Pi*n*x/l)*sin(Pi*n*a*t/l)*(Pi*n*a/l)^(-1),n=1..50);
```

⁸На печать вместо анимации удобно выводить стационарные графики, заменив последнюю строчку на

```
[6] plot(subst(u, t=1), x=0..1);
```

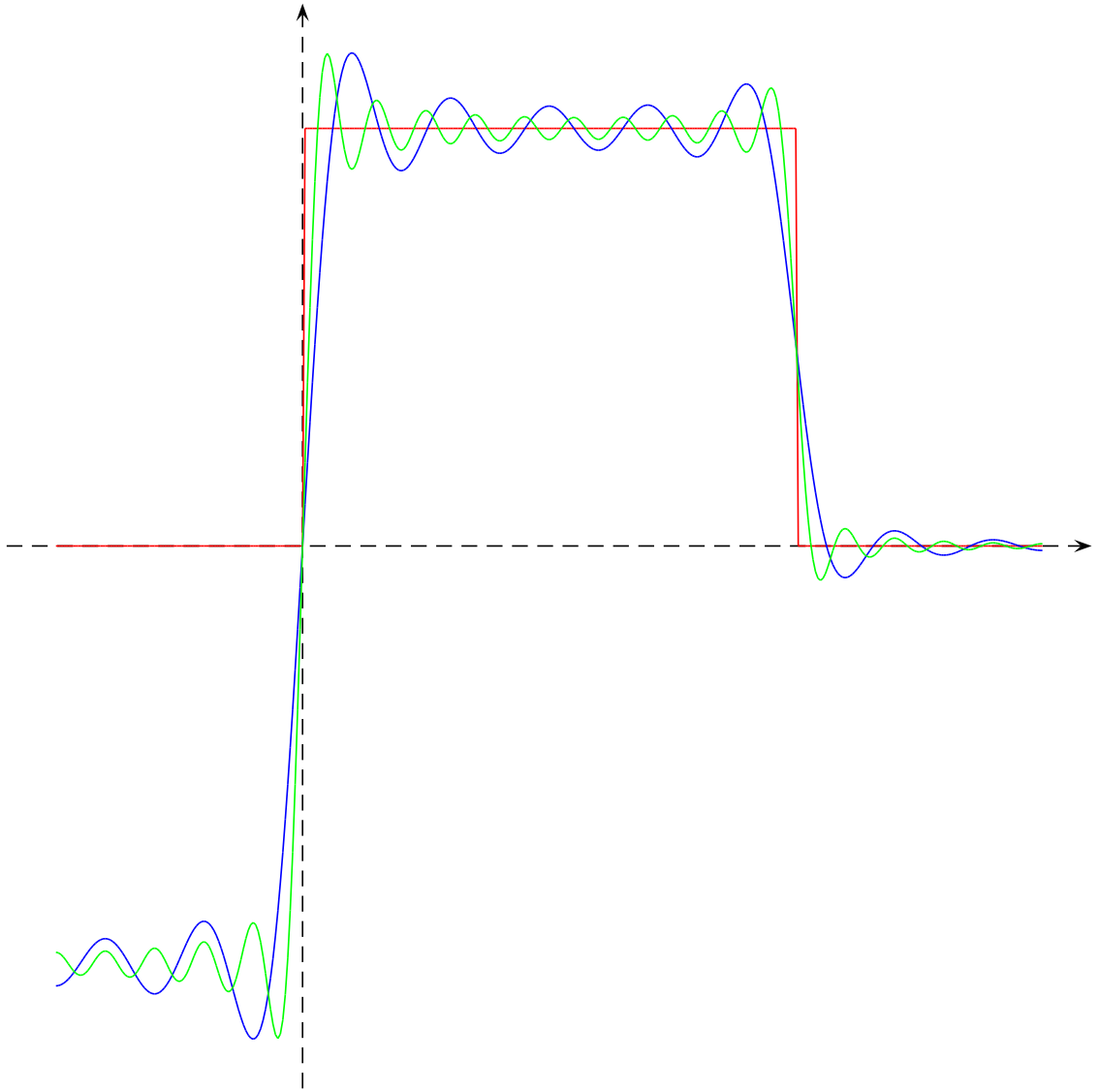


Рис. 1.6: Приближение профиля начальных скоростей частичными суммами рядов Фурье при $l = 1$, $c = l/10$, $\delta = 0.1$: красный – сама функция, синий – сумма 50-ти первых членов, зеленый – сумма 100 первых членов.

то есть эти коэффициенты убывают всего лишь как n^{-1} . Тем не менее согласно теореме Дирихле она может быть разложена в сходящийся ряд Фурье, причем в точках разрыва этот ряд сходится к среднему значению между предельными значениями ψ слева и справа от разрыва. На рис. 1.6 приведены графики этой функции и частичных сумм ее ряда Фурье. Хорошо видно, что возле точек разрыва частичные суммы осциллируют с амплитудами, которые не стремятся к нулю с ростом числа членов частичных сумм. Это явление известно в теории рядов Фурье как явление Гиббса.

Решение по способу Фурье дается рядом

$$u = \frac{4vl}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi nc}{l} \sin \frac{\pi n\delta}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \omega_n t. \quad (1.3)$$

Этот ряд сходится, поскольку его мажорантой является ряд вида $A \sum n^{-2}$, однако если этот ряд почленно дважды продифференцировать по t или по x , получится заведомо расходящийся ряд. Отсюда нельзя со всей строгостью утверждать, что функция u не является дважды дифференцируемой, но на графике решения хорошо виден разрыв первой производной по x в точке максимума (ниже будет дано строгое доказательство этого факта). Поэтому с классической точки зрения этот ряд не является решением уравнения колебаний.

Эта проблема, однако, легко решается путем сглаживания функции ψ . Именно, про мгновенный профиль скоростей, придаваемых струне ударом в точке $x = c$ молоточком малой ширины 2δ с уверенностью можно сказать следующее: скорость равна нулю вне молоточка, то есть при $|x - c| \geq \delta$, имеет единственный максимум v при $x = c$ и распределена симметрично относительно $x = c$.

По теореме о среднем коэффициент Фурье

$$\psi_n = \frac{2}{l} \int_{c-\delta}^{c+\delta} \psi(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx = \frac{2}{l} \sin \frac{\pi n \xi_n}{l} \int_{c-\delta}^{c+\delta} \psi(x) dx$$

где ξ_n – надлежащим образом выбранная точка отрезка $(c - \delta, c + \delta)$. По

теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$\left| \sin \frac{\pi n \xi_n}{l} - \sin \frac{\pi n c}{l} \right| \leq \frac{\pi n}{l} \delta,$$

поэтому коэффициент Фурье ψ_n для любой функции ψ , удовлетворяющей описанным выше условиям, отличается от «среднего» коэффициента

$$\bar{\psi}_n = \frac{4}{l} \sin \frac{\pi n c}{l} \int_0^{c+\delta} \psi(x) dx$$

на величину

$$4\pi v \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 n,$$

которая мала при малых n . Значит, амплитуды младших гармоник в разложении

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \omega_n t \sin \frac{\pi n}{l} x$$

мало отличаются от вычисленных выше амплитуд гармоник для разрывной ψ , амплитуды же старших гармоник отличаются от них радикально, поскольку для гладких функций φ коэффициенты Фурье убывают быстрее любой степени $1/n$. Поэтому в тех задачах, в которых важен не мгновенный профиль струны, а спектральный состав ее колебаний, как, напр., в задачах музыкальной акустики, все равно, как именно распределяется начальная скорость от точки удара к краям молоточка и можно довольствоваться решением в виде ряда (1.3), которое называют обобщенным решением уравнения колебаний.

Напр., в рояле по метровой струне ударяют молоточком ширины порядка 1 см. Поэтому ошибка в определении n -ой гармоники составляет примерно $10^{-3}vn$, при том, что интересуют обычно первые 7-8 гармоник.

1.1.5 Возбуждение струны щипком

При игре на щипковых музыкальных инструментах (напр., арфе или гитаре) струны отклоняют в начальный момент в некотором месте струны

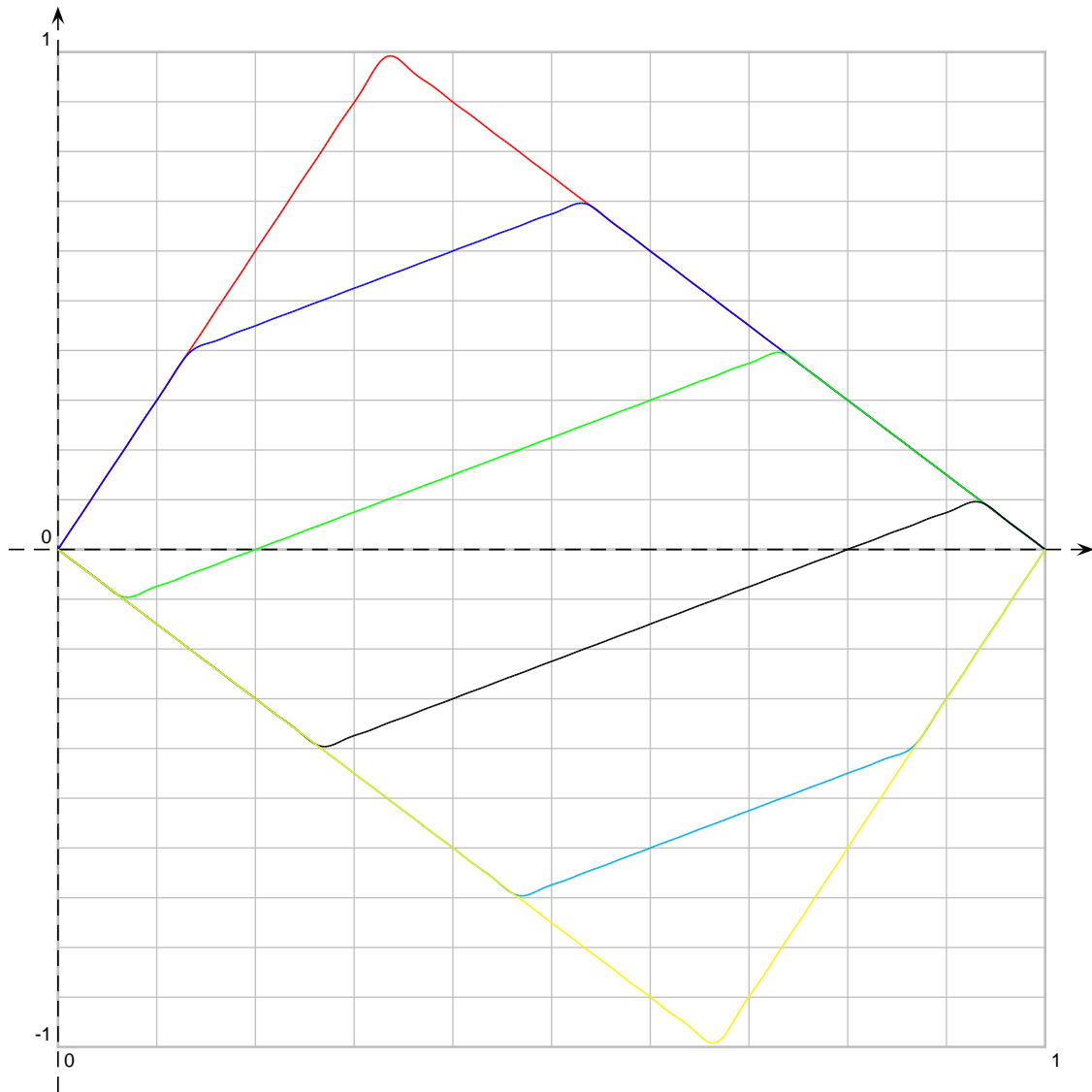


Рис. 1.7: Мгновенные профили струны при возбуждении щипком (метод Фурье, $c = l/3$) за половину периода колебаний T : $t = 0$ (красный), $t = 0.2T$ (синий), $0.4T$ (зеленый), $t = 0.6T$ (черный), $0.8T$ (циан) и $t = T$ (желтый).

$x = c$, а затем отпускают. Простейший способ представить себе эту ситуацию, допустить что в начальный момент времени профиль струны имел вид треугольника с вершиной (c, h) , то есть

$$\varphi = \begin{cases} \frac{h}{c}x, & 0 < x < c \\ \frac{h(l-x)}{l-c}, & c < x < l \end{cases} \quad (1.4)$$

а начальные скорости были равны нулю. Мультфильм, показывающий движение струны в Giac/Xcas можно сделать так:

```

1 restart;
2 l:=1; a:=1; c:=1/3; h:=1; phi:=piecewise(x<c,x*h/c,(h/(1-c))*(1-x));
3 assume(n,integer); phin:=simplify(2/l*int(phi*sin(Pi*n*x/l),x=0..1));
4 u:=sum(phin*sin(Pi*n*x/l)*cos(Pi*n*a*t/l),n=1..50);
5 animate(u,x=0..1,t=0..2*1/a,frames=20);

```

На рис. 1.7 хорошо видно, что колебание представляет собой перемещение центра щипка c из точки (c, h) в симметричную относительно центра струны точку $(l - c, -h)$. При этом наша «гибкая нить» совершенно не сопротивляется изгибам, фактически все время представляя собой ломаную из трех звеньев, что мало похоже на поведение реальной струны.

Как и в предыдущей задаче применение метода Фурье здесь осложнено проблемами со сходимостью рядов. Функция φ непрерывна, но ее график имеет излом в точке $x = c$, поэтому ее коэффициенты Фурье

$$\varphi_n = \frac{1}{l} \int_0^c \frac{h}{c} \sin \frac{\pi n}{l} x dx + \frac{1}{l} \int_c^l \frac{h(l-x)}{l-c} \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{2hl^2}{\pi^2 n^2 c(l-c)} \sin \frac{\pi n c}{l}$$

убывают как n^{-2} . Поэтому ее ряд Фурье сходится на отрезке $0 < x < l$ равномерно. Решение же по методу Фурье дается рядом

$$u = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n c}{l} \cos \omega_n t \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

дифференцировать который два раза по x или t нельзя. Впрочем и на рис. 1.7 хорошо видно, что мгновенный профиль струны все время имеет изломы. Таким образом, решение и в данном случае не является классическим.

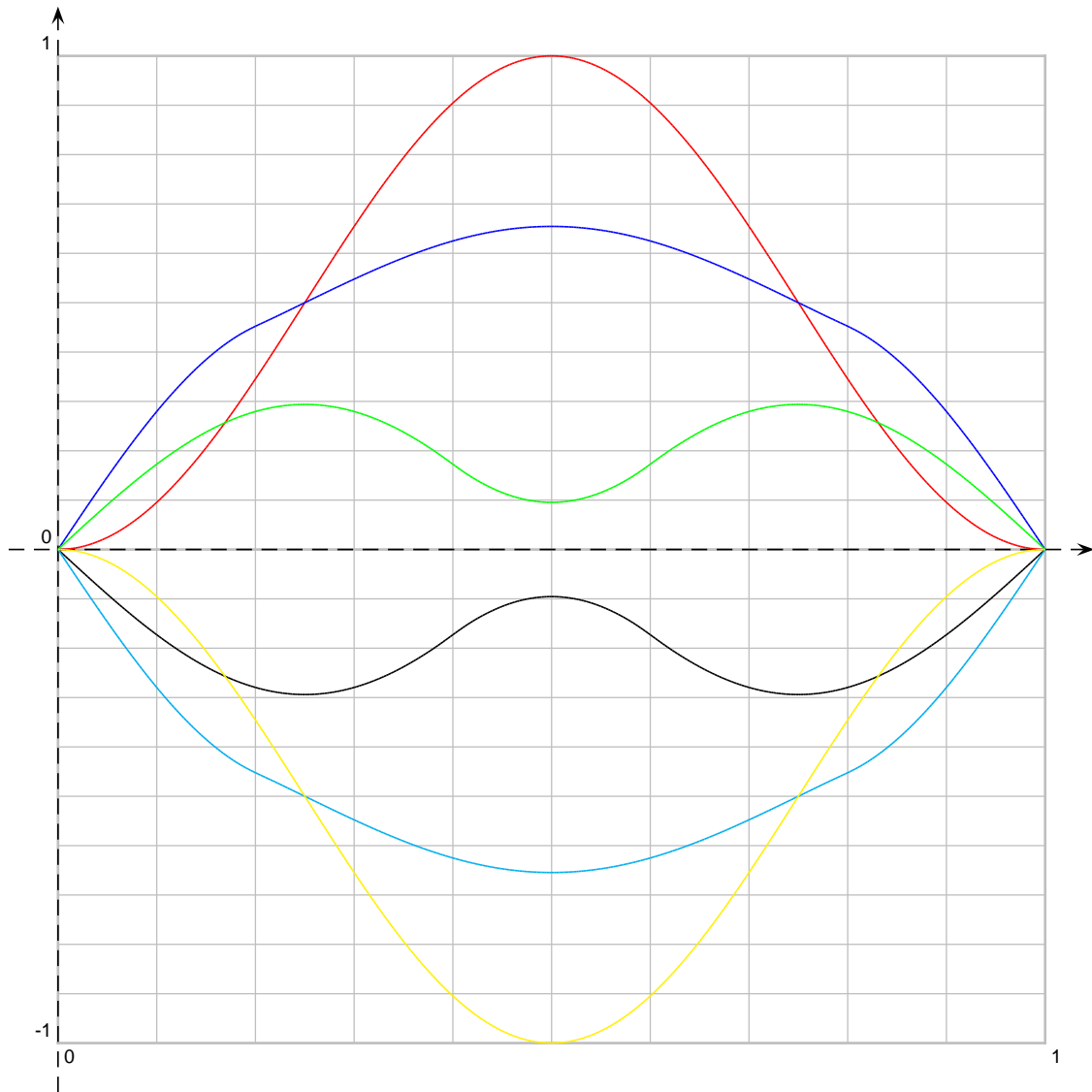


Рис. 1.8: Мгновенные профили струны при возбуждении начальным профилем $u|_{t=0} = \sin^2 \frac{\pi x}{l}$ за половину периода колебаний T : $t = 0$ (красный), $t = 0.2T$ (синий), $0.4T$ (зеленый), $t = 0.6T$ (черный), $0.8T$ (циан) и $t = T$ (желтый).

Конечно, всегда можно взять гладкий начальный профиль. Напр., при $l = 1$ для начального профиля

$$\varphi = \sin^2(\pi x)$$

коэффициенты Фурье

$$\varphi_n = \frac{4(-1)^n - 4}{\pi n(n^2 - 4)}$$

убывают уже как n^{-3} и поэтому ряд для решения оказывается 2-жды дифференцируемым. Это можно доказать прямо, используя признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости, ниже мы дадим куда более простое доказательство, основанное на формуле Даламбера. Впрочем, появление двух максимумов на мгновенном профиле (см. рис. 1.8) следует вновь объяснять чрезмерной гибкостью струны.

Дом. задание.

1. Решите задачу о возбуждении ударом, используя в начальных условиях более разумную гладкую функцию:

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \begin{cases} v \cos \frac{x-c}{\delta} \frac{\pi}{2}, & |x-c| < \delta \\ 0, & |x-c| > \delta \end{cases}$$

Укажите принципиальные отличия решения в этом случае, от разобранного выше. Ср., [4], прил. 1.

2. Какие изменения следует внести в предложенное выше изложение метод Фурье с тем, чтобы решить начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < \pi, t > 0) \\ u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = 1 \\ u'|_{x=0} = u'|_{x=\pi} = 0 \end{cases}$$

Ср., [2], стр. 283, № 1

1.1.6 Спектральный состав звука, издаваемого струнами

При записи звука, издаваемого колеблющейся струной, в некотором месте записывают колебания давления воздуха на пластинку или какое-либо другое тело. Результат представляет собой график некоторой быстро осциллирующей функции от времени (график звукового сигнала). Раньше эту функцию записывали аналоговым образом прямо на пластинки, теперь, оцифровав, в звуковые файлы.

Согласно методу Фурье профиль струны колеблется по закону

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t + \theta_n) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

поэтому и эта функция не может иметь вид синусоиды, но должна состоят из целого набора колебаний с частотами

$$\omega_n = \frac{\pi a}{l} n, \quad n = 1, 2, \dots$$

скажем иметь вид

$$\sum B_n \sin(\omega_n t + \theta_n),$$

причем естественно предположить, что величина амплитуды B_n n -ой гармоники пропорциональна амплитуде соответствующей гармоники струны A_n .

Частота первой гармоники, имеющей обычно наибольшую амплитуду, воспринимается в нашем сознании как высота звука, его основной тон. Прочие же гармоники, или обертона, воспринимаются как призвуки, окрашивающие основной тон; эту окраску обычно называют тембром звука.

В акустике высоту звука указывают в герцах, в музыке – при помощи нот. При принятой ныне равномерной темперации ноте до первой октавы отвечает частота в 261,63 герца⁹, ноте до следующей октавы отвечает частота в 2 раза большая, интервал между ними делят на 12 частей, именуемых полутонами, увеличивая частоту каждый раз в $\sqrt[12]{2}$ раз, обозначая части как до диез, ре, ре диез и так далее. При этом в логарифмической шкале октава делится на равные части.

Для исследования спектрального состава музыкальных записей удобно использовать Sonic Visualiser¹⁰, свободно распространяемый The Centre for Digital Music, Queen Mary, University of London.

Возьмем для первого примера файл UC7-FC3-L-16.wav (рис. 1.9), в который записан звук, возникающий при сильном ударе по клавише До первой

⁹Традиционно за основу берут не ноту до, а ноту ля в 440,00 герц.

¹⁰<http://www.sonicvisualiser.org>

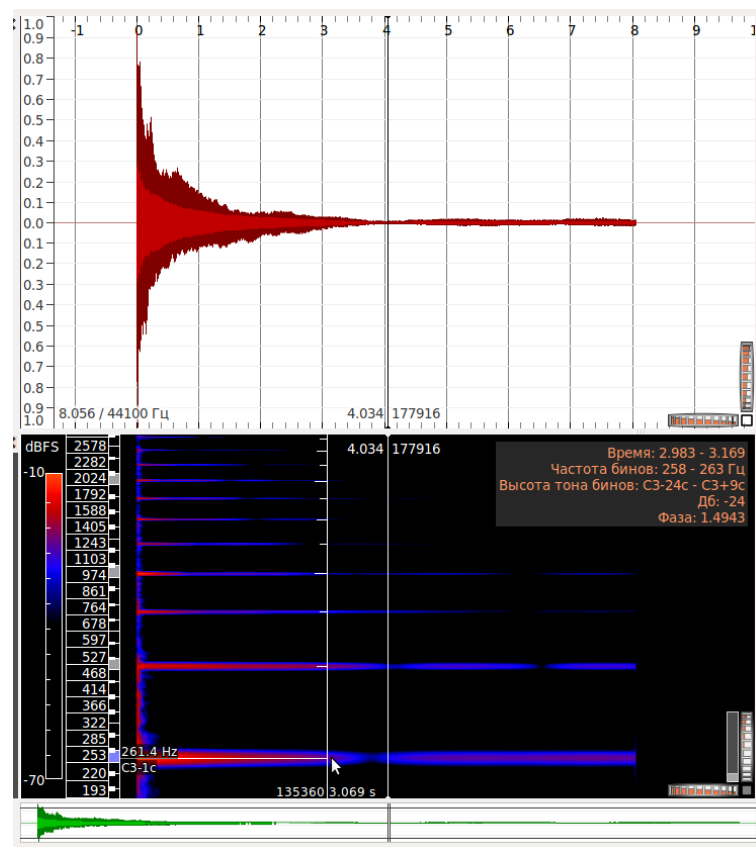


Рис. 1.9: Волновая функция и спектрограмма звука, издаваемого при нажатии клавиши До на рояле YAMAHA C7.

октавы (с3) фортепиано. На верхней диаграмме (волновой форме) представлен график звукового сигнала в виде быстро осциллирующей функции. Хорошо видно, что вскоре после удара эта функция становится почти периодической, но при этом сильно отличается от синусоиды. Спектральный анализ показывает, что эта функция представляет собой сумму синусоид, частоты которых кратны основной нижней частоте.

При этом основной тон – нота до (261,4 герца), выше идут обертона. Первый обертон дает до следующей октавы, второй – соль, третий – до 3-ей октавы, четвертый – ми, пятый – соль. Поэтому первые пять обертонов дают в качестве призвуков ноты мажорного трезвучия, что придает всему звуку приятный оттенок, называемый обычно полнотою. Наоборот, шестой обертон попадает где-то между ля и ля диезом, что придает звуку неприятный оттенок, возникает диссонанс. Поэтому при изготовлении музыкальных инструментов стремятся так возбуждать колебания струны, чтобы этот обертон (7 гармоника) не был слышен. В рояле для этого ударяют молоточком не в центре струны, а на расстоянии $\frac{1}{7}$ от конца струны, то есть в узел 7-ой гармоники. Это правило легко объяснить, взглянув на формулу (1.3) для колебаний струны, возбужденной ударом в точке $x = c$. Если $c = l/7$, то

$$\sin \frac{\pi n c}{l} = \sin \frac{\pi n}{7} = 0$$

при $n = 7$ и поэтому 7-ая гармоника возбуждаться не может.

Используемый при этом способ выделения набора частот синусоид, из которых состоит звуковой сигнал, конструктивно весьма прост. В качестве спектрограммы для заданного сигнала $f(t)$ строится график модуля функции

$$F(t, \omega) = \int_{t-T}^{t+T} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

в осях t (в секундах) и ω (в герцах). При достаточно больших значениях параметра T эта функция имеет ярко выраженные максимумы при тех ω , которые отвечают частотам синусоид, слагающих f . Для того, чтобы

Nocturne No. 1 in Eb Minor
Op. 33, No. 1

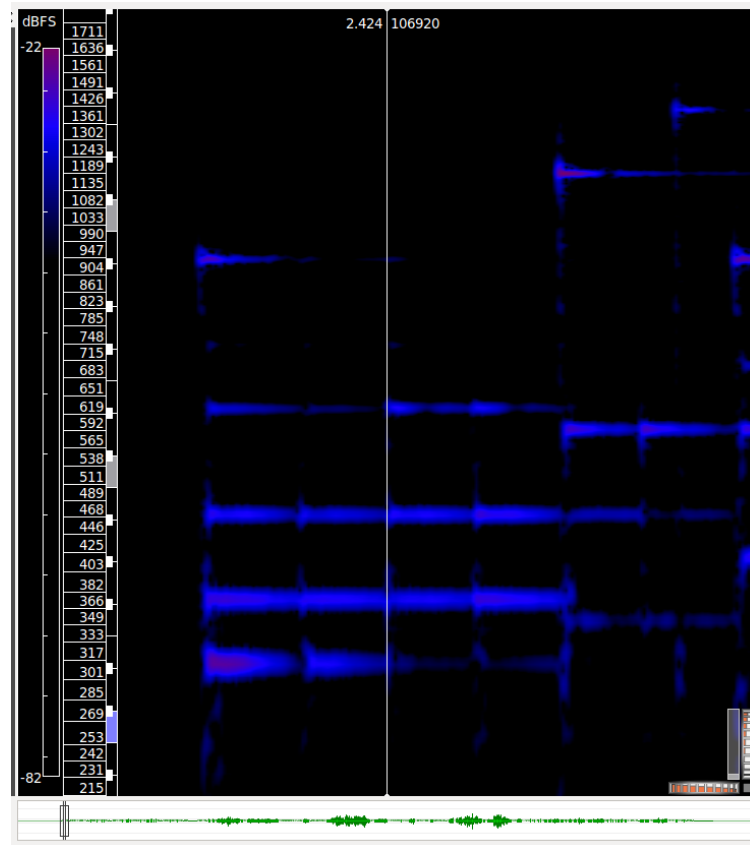


Рис. 1.10: Спектрограмма первого такта ноктюрна № 1 Г. Форэ.

убедится в этом, достаточно вычислить интеграл

$$\int_{-T}^T \sin \omega_0 \tau e^{i\omega \tau} d\tau = \frac{\sin(\omega_0 - \omega)T}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin(\omega_0 + \omega)T}{\omega + \omega_0}$$

С ростом T первый член, функция Sinc, будет иметь один все более и более выраженный максимум, а второй член накладывает на нее колебания, амплитуда которых не может расти. Соответствующая анимация представлена в файле `fig/mmph3-1.gif`. В файле `fig/mmph3-2.gif` та же ситуация представлена для суммы нескольких синусов с разными фазами.

Этот способ годится и для выделения синусоид в записях музыкальных произведений, нужно лишь брать T много большим периода колебаний струн, но много меньше интервала между нажатиями нот. В этом случае на участках времени длины $2T$ график будет представлять собой сумму конечного числа синусоид и лишь в момент нажатия новых клавиш на графике F будет появляться «грязь», сам момент нажатия можно опять же определить с точностью до величины порядка T . Для примера на рис. 1.10 представлена спектрограмма первого такта ноктюрна № 1 Г. Форе (Faure.wav). Любопытно отметить, что в первой четверти первого такта ми бемоль второй октавы отсутствует в нотах, но появляется в спектрограмме как обертон к ми бемоль первой октавы.

1.1.7 Корректная постановка начально-краевой задачи о колебании струны

В классических курсах уравнений математической физики в центре лежит понятие классического решения. Примем след. вполне естественное определение.

Определение 1. Классическим решением u начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

называют функцию u переменных x и t , определенную и непрерывно дифференцируемую в замкнутой области

$$0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0,$$

удовлетворяющую на границе этой области начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x)$$

и граничным условиям

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$$

а в внутри области, то есть при

$$0 < x < l, \quad t > 0,$$

имеющую частные производные 2-го порядка, удовлетворяющие уравнению колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Причины, по которым берут именно столько краевых условий, требуют пояснения. Напр., раз конец $x = 0$ закреплен, то и $u_t(0) = 0$, но мы не добавляем это условие в задачу (1.5). Дело в том, что при составлении задачи математической физики следует стремиться не перечислить все условия, а поставить математически корректную задачу.

Определение 2. Задача называется корректной по Адамару, если 1.) ее решение единственно, 2.) ее решение существует и 3.) ее решение устойчиво относительно малых изменений входных данных.

Достаточно легко доказать единственность классического решения:

Теорема 2. Задача (1.5) о колебаниях струны допускает не более одного классического решения.

Доказательство. Допустим, что задача (??) имеет два классических решения при одних и тех же начальных данных, тогда разность w этих решений удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & (0 < x < l, t > 0) \\ w|_{t=0} = w_t|_{t=0} = 0 \\ w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$E(t) = \int_0^l (w_t^2 + a^2 w_x^2) dx,$$

при $t = 0$ эта функция равна нулю, а ее производная

$$\frac{dE}{dt} = 2 \int_0^l (w_t w_{tt} + a^2 w_x w_{xt}) dx.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^l w_x \frac{\partial w_t}{\partial x} dx = w_x w_t \Big|_{x=0}^l - \int_0^l \frac{\partial w_x}{\partial x} w_t dx.$$

Но из граничных условий следует, что $w(0, t) = w(l, t) = 0$ при всех $t \geq 0$, дифференцируя это равенство по t , имеем

$$w_t \Big|_{x=0} = w_t \Big|_{x=l} = 0,$$

поэтому

$$\int_0^l w_x \frac{\partial w_t}{\partial x} dx = - \int_0^l w_t w_{xx} dx,$$

откуда

$$\frac{dE}{dt} = 2 \int_0^l w_t (w_{tt} - a^2 w_{xx}) dx = 0.$$

Это означает, что E удовлетворяет задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = 0, & E|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

имеющей в силу теоремы Коши единственное решение, а именно, $E = 0$.

Это означает, что при всех t верно

$$\int_0^l (w_t^2 + a^2 w_x^2) dx = 0,$$

но интеграл от неотрицательной функции равен нулю лишь тогда когда сама функция равна нулю, то есть

$$w_t^2 + a^2 w_x^2 = 0,$$

откуда

$$w_t = w_x = 0.$$

Отсюда в силу формулы конечных приращений для функции двух переменных следует, что $w = \text{Const}$. Из начальных условий сразу находим, что эта константа равна нулю. Таким образом, разность двух классических решений неизбежно равна нулю. \square

Хотя метод Фурье позволяет конструктивно находить решения задачи (1.5), сказанное выше в его обоснование не дает возможности судить о ее корректности: мы пока не доказали, во-первых, что эта задача не допускает другого решения, которое не было бы суперпозицией гармоник, во-вторых, что ряды Фурье доставляют классическое решение этой задачи, а на примерах убедились в обратном. В [1], гл. VII, §2-4 дается основанное на методе Фурье прямое доказательство следующей теоремы:

Теорема 3. Пусть начальные функции задачи (1.5) удовлетворяют след. условиям: 1.) функция φ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $0 < x < l$ и имеет на нем кусочно-непрерывную третью производную, 2.) функция ψ непрерывно дифференцируема на том же отрезке и имеет на нем кусочно-непрерывную вторую производную, и 3.) на концах этого отрезка верно

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Тогда задача (1.5) корректно поставлена. Более того, ее единственное классическое решение можно представить в виде ряда (1.2).

Мы докажем эту теорему путем сведения к задаче на прямой. Пока же отметим, что предположение о гладкости начальных данных кажутся вполне естественными, равно как и условия

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0,$$

означающие лишь, что в начальный момент концы струны неподвижны.

Условие же

$$\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$$

запрещает струне искривляться возле точек закрепления и кажется обусловленным методом доказательства.

Дом. задание.

1. Докажите, что любое классическое решение (1.5) удовлетворяет краевому условию $u_t(0) = 0$.

2. Докажите, что задача

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

имеет не более одного классического решения.

1.1.8 Уравнение колебаний на бесконечной прямой, формула Даламбера

Уравнение колебаний выделяется среди прочих уравнений мат. физики тем, что для него можно выписать общее решение. В самом деле, пусть u удовлетворяет уравнению колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

в некоторой области изменения переменных x и t . Сделаем замену переменных

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at;$$

тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

и далее

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}(-a) + \frac{\partial u}{\partial \eta}a, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(-a)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(-a)a + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}a^2$$

поэтому в новых переменных уравнение колебаний записывается просто как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Это уравнение легко решить:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = F(\eta), \quad u = \int F(\eta) d\eta + G(\xi).$$

Иными словами, любое решение уравнения $u_{\xi\eta} = 0$ можно представить в виде

$$u = F_1(\xi) + F_2(\eta).$$

Обратное очевидно: всякая функция такого вида удовлетворяет уравнению $u_{\xi\eta} = 0$. Отсюда следует, что *общим решением уравнения колебаний является*

$$u = F_1(x - at) + F_2(x + at), \quad (1.6)$$

где F_1 и F_2 – какие угодно функции.¹¹

Обратимся теперь к доказательству корректности простейшей задачи для уравнения колебаний – задачи на бесконечной прямой. Выше, при рассмотрении возбуждения струны ударом молоточка (см. раздел 1.1.4), мы уже имели возможность видеть на рис. 1.5, что локальное возбуждение струны приводит к возникновению горба, бегущего по струне с постоянной скоростью. Желая исследовать движение такого рода горбов вдоль струны, принимают ее длину бесконечно большой и получают очень простую задачу.

Теорема 4. Если функция φ дважды непрерывно дифференцируема, а функция ψ непрерывно дифференцируема хотя бы один раз, то начальная задача на прямой:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x \in \mathbb{R}, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi, & u_t|_{t=0} = \psi \end{cases}$$

имеет и притом одно классическое решение, которое доставляет *формула Даламбера*

$$u = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

¹¹Если эти функция не являются дифференцируемыми, но полезными для тех или иных приложений, то u называют обобщенным решение уравнения колебаний.

Иными словами, начально-краевая задача для уравнения колебаний на прямой поставлена корректно.

Доказательство. (i) Если задача допускает классическое решение, то найдутся такие функции F_1 и F_2 , что

$$u = F_1(x - at) + F_2(x + at), \quad (t > 0).$$

Подставляя это выражение в начальные условия, имеем

$$F_1(x) + F_2(x) = \varphi(x), \quad -aF_1'(x) + aF_2'(x) = \psi(x),$$

откуда

$$F_1(x) + F_2(x) = \varphi(x), \quad -F_1(x) + F_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi,$$

складывая и вычитая эти равенства, получим

$$2F_1(x) = \varphi(x) - \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi, \quad 2F_2(x) = \varphi(x) + \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 2u &= 2F_1(x - at) + 2F_2(x + at) = \\ &= \varphi(x - at) - \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\xi) d\xi + \varphi(x + at) + \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\xi) d\xi = \\ &= \varphi(x - at) + \varphi(x + at) + \frac{1}{a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом, классическое решение, если оно существует, дается формулой Даламбера, и, следовательно, однозначно определено заданием начальных условий.

(ii) Функция u , заданная формулой Даламбера, имеет вид $F_1(x - at) + F_2(x + at)$ и поэтому является классическим решением уравнения колебаний (функции F_1 и F_2 дважды дифференцируемы, ради чего и наложены

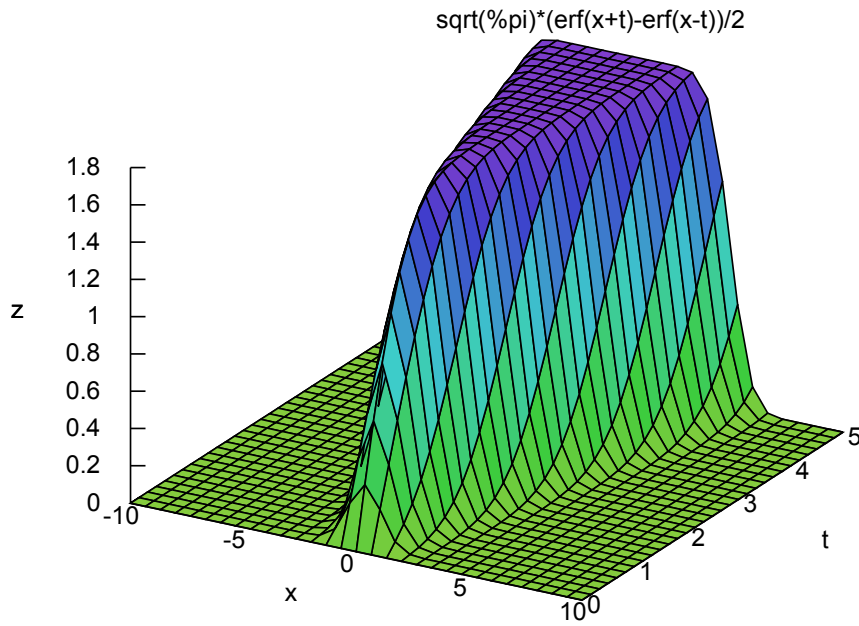


Рис. 1.11: Функция $\frac{\sqrt{\pi}}{2} (\text{Erf}(x + t) - \text{Erf}(x - t))$.

условия на φ и ψ), а также, очевидно, удовлетворяет начальным условиям. Следовательно, формула Даламбера доставляет классическое решение рассматриваемой задачи.

(iii) При малых изменениях φ и ψ функция u , заданная формулой Даламбера, тоже изменяется мало. Следовательно, рассматриваемая задача устойчива по отношению к малому изменению начальных данных, а других входных данных в этой задаче нет. \square

Напр., если ударить струну молоточком в точку $x = c$ (см. раздел 1.1.4):

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \begin{cases} v, & |x - c| < \delta \\ 0, & |x - c| > \delta \end{cases} = v\theta(x)$$

то решением будет

$$u = \frac{v}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \theta(\xi) d\xi = \frac{v}{2a} \text{Длина}([x - at, x + at] \cap [c - \delta, c + \delta]).$$

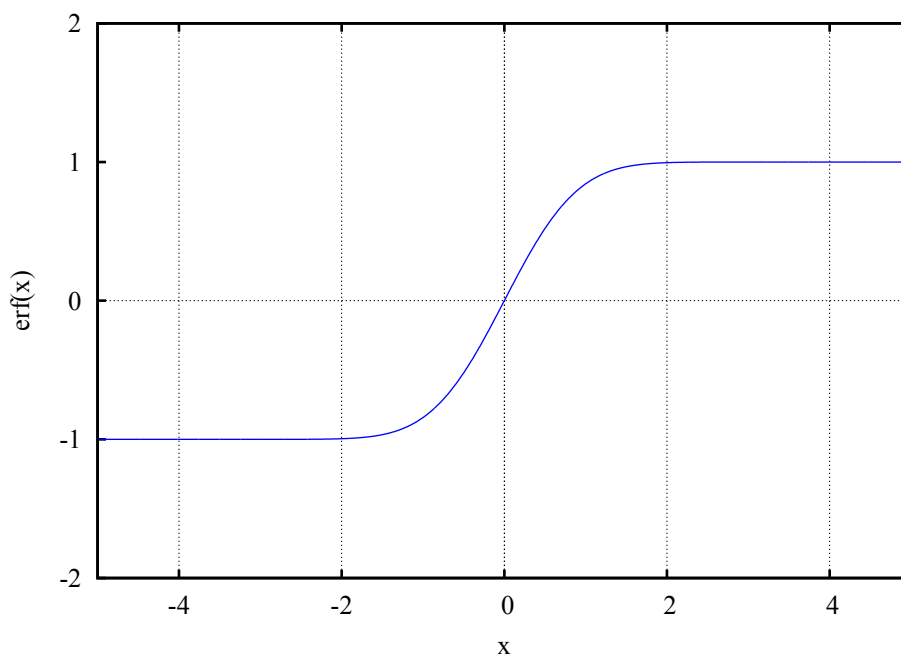


Рис. 1.12: Функция Erf.

Это решение не является классическим, да и представить его себе не очень просто. Поэтому представляется целесообразным сгладить профиль начальных скоростей до

$$u_t|_{t=0} = v e^{-x^2},$$

тогда по формуле Даламбера

$$u = \frac{v}{2a} \int_{x-at}^{x+at} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{v\sqrt{\pi}}{4a} (\text{Erf}(x+at) - \text{Erf}(x-at)),$$

где Erf – интеграл ошибок

$$\text{Erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-t^2} dt.$$

Эта функция часто возникает в приложениях, но не может быть выражена при помощи элементарных функций¹²; ее график изображен на рис. 1.12.

¹²LIUVILLE. J. Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendentes. // Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. XIII, Hft. 2., pag. 93 - 118.

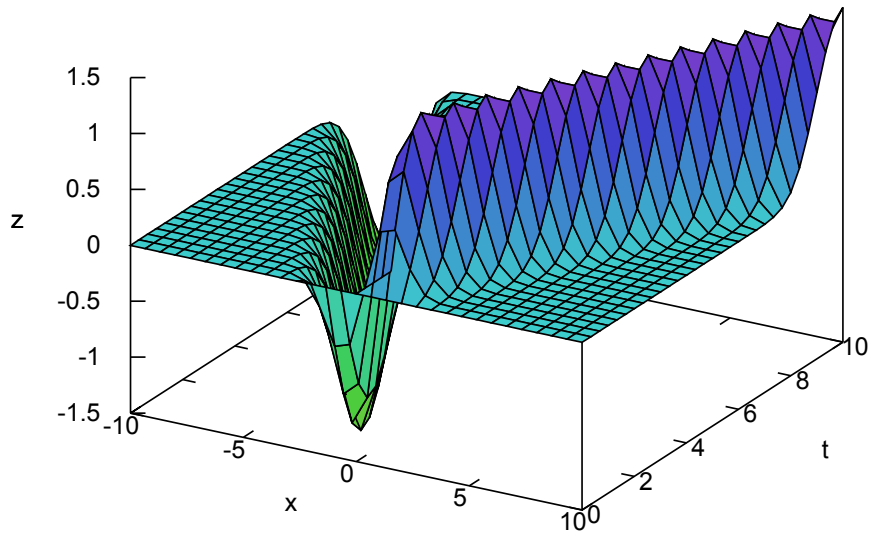


Рис. 1.13: Решение задачи (1.7) и его продолжение на $x < 0$.

Таким образом, удар происходит смещение струны на некоторую постоянную величину и это смещение распространяется вдоль струны с постоянной скоростью a . Именно таким образом, ведет себя мгновенный профиль струны конечной длины, если удар приходится в ее середину и рассматриваются малые времена (как только возбуждение доходит до закрепленного конца струны, происходит отражение).

Желая рассмотреть отражение только на одном конце струны, напр., движение горба вдоль струны, возбужденного путем удара возле одного из концов, рассматривают задачу на полупрямой:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x > 0, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi, & u_t|_{t=0} = \psi \\ u|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

Эта задача легко сводится к задаче на всей прямой путем нечетного продолжения начальных данных. В самом деле, если в формулу Даламбера

подставить нечетные φ и ψ , то

$$u|_{x=0} = \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\xi) d\xi = 0,$$

то есть граничное условие удовлетворяется автоматически.

В частности эффект от удара струны с закрепленным концом $x = 0$ молоточком в точку $x = c$ эквивалентен удару бесконечной струны в точки $x = c$ и $x = -c$ с импульсами, направленными в разные стороны. Поэтому решением будет разностью решений предыдущей задачи. Напр., решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x > 0, t > 0) \\ u|_{t=0} = 0, & u_t|_{t=0} = e^{-(x-1)^2} \\ u|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

будет

$$u = \frac{v\sqrt{\pi}}{4a} (\operatorname{Erf}(x + at - 1) - \operatorname{Erf}(x - at - 1) - \operatorname{Erf}(x + at + 1) + \operatorname{Erf}(x - at + 1))$$

На рис. 1.13 хорошо видно, что на профили струны образуются два горба, разбегающиеся от закрепленной точки в противоположные стороны со скоростью a . Вероятно, именно такие горбы имеют ввиду, когда говорят о распространении сигнала вдоль струны.

Дом. задание. При каких φ и ψ решение задачи на прямой имеет вид бегущей волны $u = U(x - at)$?

1.1.9 Сведение задачи на отрезке к задаче на прямой

Формула (1.2) для решения задачи (1.5) по методу Фурье, как можно подумать, противоречит утверждению, полученному в пред. разделе, о том, что любое решение уравнение колебаний имеет вид $F_1(x - at) + F_2(x + at)$. Однако в действительности ряд (1.2) можно привести к такому виду. Рассмотрим для простоты задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi, & u_t|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Решение, найденное методом Фурье, мы записывали выше так

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \cos \frac{a\pi n t}{l} \sin \frac{\pi n x}{l},$$

это выражение можно преобразовать:

$$u = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \left(\sin \frac{\pi n(x+at)}{l} + \sin \frac{\pi n(x-at)}{l} \right); \quad (1.9)$$

если, как и в доказательстве теоремы 1, продолжить φ с отрезка $[0, l]$ на отрезок $[-l, 0]$ нечетным образом, а далее на всю ось x с периодом $2l$, то формула

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

будет верна при всех $x \in \mathbb{R}$. Но тогда (1.9) можно переписать как

$$u = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2},$$

что и должно быть по формуле Даламбера. Фактически эта формула предлагает другой способ решения задачи (1.8):

Теорема 5. Если функция φ , заданная на отрезке $0 < x < l$, допускает дважды дифференцируемое нечетное $2l$ -периодическое продолжение на всю вещественную ось Ox , то задача (1.8) имеет и притом единственное классическое решение, которое дается формулой Даламбера

$$u = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2}.$$

Доказательство. Функция

$$u = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2}$$

удовлетворяет уравнению колебаний, если φ является 2-жды дифференцируемой функцией на всей вещественной прямой. На концах отрезка $0 < x < l$ верно

$$u|_{x=0} = \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} = 0$$

в силу нечетности продолжения, и

$$\begin{aligned} u|_{x=l} &= \frac{\varphi(l-at) + \varphi(l+at)}{2} = \frac{\varphi(l-at-2l) + \varphi(l+at)}{2} \\ &= \frac{\varphi(-(at+l)) + \varphi(l+at)}{2} = 0 \end{aligned}$$

в силу его $2l$ -периодичности. Выполнение обоих начальных условий (1.8) очевидно. Наконец, в силу теоремы 2 классическое решение единственно. \square

Формула для решения кажется очень простой, однако далеко не всегда она позволяет сразу выписать решение задачи. Для задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0 < x < \pi, t > 0) \\ u|_{t=0} = \sin^3(x), & u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \end{cases}$$

действительно сразу можно написать

$$u = \frac{\sin^3(x-at) + \sin^3(x+at)}{2},$$

поскольку $\sin^3(x)$ – сама по себе нечетная 2π периодическая функция. Однако внешне похожую на нее задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0 < x < \pi, t > 0) \\ u|_{t=0} = \sin^2(x), & u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \end{cases}$$

нельзя решить в конечном виде. Дело в том, что четную функцию $\sin^2(x)$ нужно продолжить с отрезка $[0, \pi]$ нечетным образом через $x = 0$, для этого или придется задавать ее различными выражениями на отрезках $[\pi n, \pi(n+1)]$, или разложить в бесконечный ряд Фурье по синусам, что, собственно говоря, и предлагается сделать в методе Фурье.

В Giac, как, вероятно, и в любой современной системе компьютерной алгебры, нечетное $2l$ -периодическое продолжение произвольной функции

φ , заданной на отрезке $0 < x < l$, можно записать при помощи двух функций – `frac` (взятие дробной части) и `piecewise`. Первая позволяет задать $2l$ -периодическую функцию

$$\theta(x) = 2\text{frac}\left(\frac{x-l}{2l}\right) - 1,$$

равную x на отрезке $-l < x < l$, а вторая – продолжить φ на отрезок $-l < x < 0$ нечетным образом:

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 < x < l \\ -\varphi(-x), & -l < x < 0 \end{cases}$$

Комбинация этих функций

$$\hat{\varphi}(x) = g(\theta(x))$$

как раз и будет $2l$ -периодической нечетной функцией, совпадающей с $\varphi(x)$ на отрезке $0 < x < l$.

Напр., мультфильм, показывающий колебания струны, возбужденной щипком 1.4, можно сделать так:

```

1 restart;
2 c:=1/3; h:=1;
3 phi:=x->piecewise(x < c, h*x/c, h*(1-x)/(1-c));
4 g:=x->piecewise(x<0,-phi(-x),phi(x));
5 theta:=x->2*(frac((x-1)/2)-1/2);
6 f:=x->g(theta(x))
7 u:=(f(x+t)+f(x-t))/2;
8 animate(u,x=0..1,t=0..2,frame=30);

```

Мгновенные профили струны, которые дает метод Даламбера (рис. 1.14), можно сравнить с вычисленными выше приближенно по методу Фурье (рис. 1.8): различия заметны лишь в точках излома, которые ряды Фурье сглаживают. Высказанное выше при обсуждении рис. 1.8 предположение о том, что мгновенный профиль состоит из ломаных получает теперь строго доказательство: решение по формуле Даламбера оказывается комбинацией

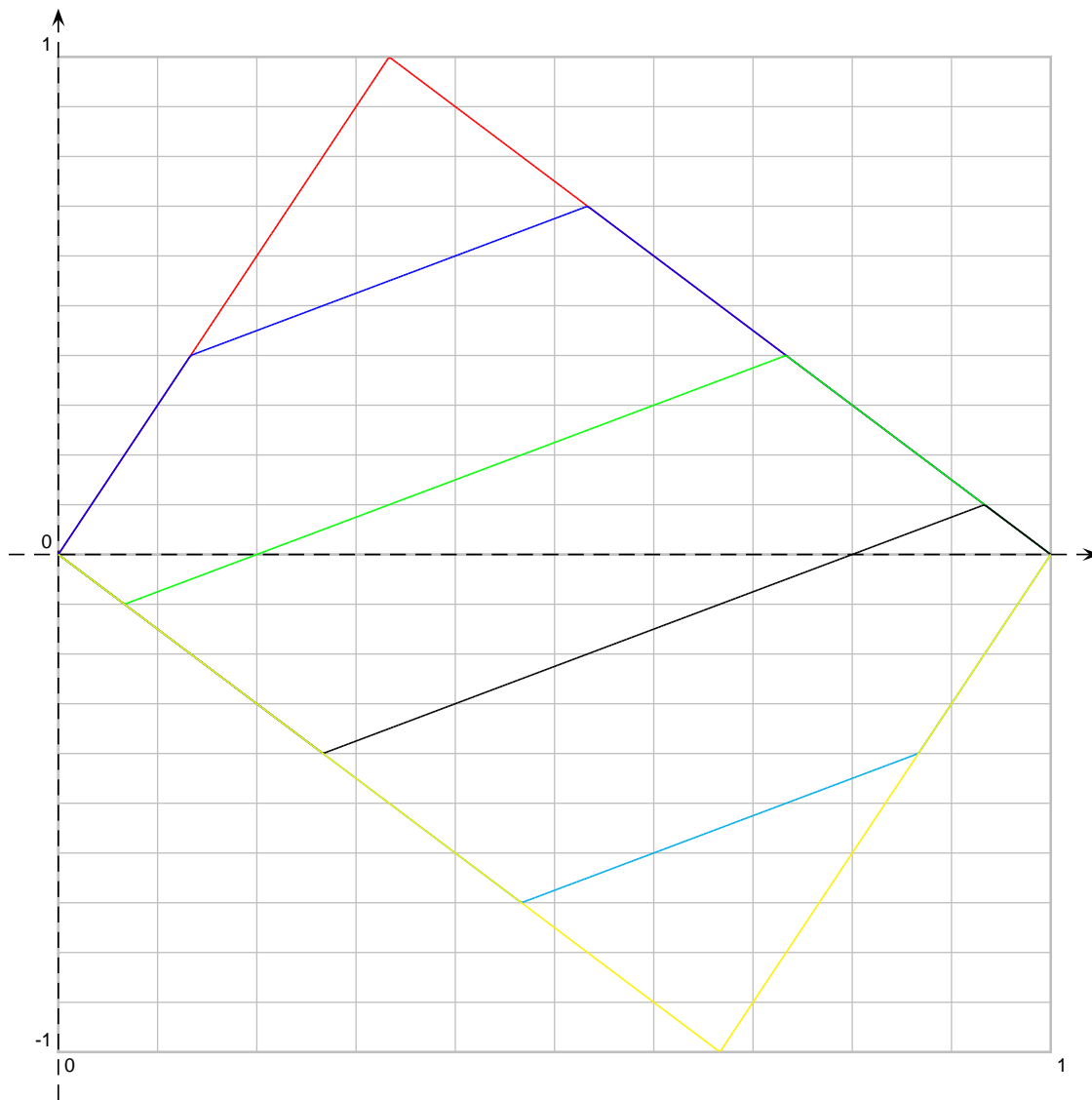


Рис. 1.14: Мгновенные профили струны при возбуждении щипком ($c = l/3$, метод Даламбера) за половину периода колебаний T : $t = 0$ (красный), $t = 0.2T$ (синий), $0.4T$ (зеленый), $t = 0.6T$ (черный), $0.8T$ (циан) и $t = T$ (желтый).

кусочно линейных функций. Поэтому в данном случае задача не допускает классического решения.

Для того, чтобы продолжение было 2-жды непрерывно-дифференцируемой функцией, необходимо и достаточно, чтобы таковой был начальный профиль $u = \varphi$ на отрезке $(0 \leq x \leq l)$ и чтобы он удовлетворял условиям

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0.$$

Это утверждение в одну сторону составляет существенную часть теоремы 3 и теперь вполне очевидно, что условие $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ не является случайным дефектом в доказательстве этой теоремы. Напр., при

$$u|_{t=0} = \sin^2 \frac{\pi x}{l}$$

по формуле Даламбера получаются профили, которые с графической точностью совпадают с профилями, полученными по методу Фурье (см. рис. 1.8).

Замечание. – С точки зрения простоты построения мгновенных профилей струны метод Фурье много проигрывает методу Даламбера, который дает точное решение и не требует суммирования какого либо пусть даже и сходящегося ряда, а, следовательно, экономит машинные ресурсы. Во времена Фурье, напротив, метод Даламбера казался несовершенным, поскольку лишь метод Фурье давал решение в виде единого «аналитического выражения». Дело в том, что тогда в список элементарных функций входили только аналитические функции, что лишало возможности записать нечетное $2l$ -периодическое продолжение в конечном виде.

Дом. задание. 1. При каких $n \in \mathbb{N}$ решение задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0 < x < \pi, t > 0) \\ u|_{t=0} = \sin^n(x), & u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \end{cases}$$

можно выписать по формуле Даламбера?

2. Можно ли решить задачу о возбуждении струны длины l ударом при помощи формулы Даламбера?

1.2 Общая схема метода Фурье

Способ Фурье в том виде, который мы использовали при доказательстве существования и единственности решения, годится для широкого класса задач математической физики. Итак, пусть в области

$$0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0$$

требуется решить линейное дифференциальное уравнение в частных производных по t и x , скажем

$$L[u] = f,$$

к которому добавлено некоторое количество начальных и граничных условий.

1. Решаем задачу на собственные значения для дифференциального уравнения

$$\varphi_{xx} + \lambda\varphi = 0$$

с теми же граничными условиями, что и исходная задача. Получаем набор собственных функций $\{\varphi_n\}$. В частности, если указаны граничные условия Дирихле

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$$

то набором собственных функций будут синусы:

$$\sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots$$

а если указаны граничные условия Неймана

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0,$$

то набором собственных функций будут косинусы:

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \dots$$

2. Используя теорему о разложении периодической функции в ряд Фурье, доказываем, что решение исходной задачи, если оно вообще существует, можно разложить как функцию x в ряд по этим собственным функциям:

$$u(x, t) = \sum_n u_n(t) \varphi_n(x). \quad (1.10)$$

В частности, если указаны граничные условия Дирихле

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$$

то решение разлагается в ряд по синусам:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l},$$

а если указаны граничные условия Неймана

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0,$$

то решение разлагается в ряд по косинусам:

$$u(x, t) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cos \frac{\pi n x}{l}.$$

На самом деле, можно независимо от теории рядов Фурье доказать общую теорему, принадлежащую В.А. Стеклову, о полноте системы собственных функций.

3. Умножая (1.10) на φ_m и интегрируя по x от 0 до l , выразим u_m через интеграл от u . Напр., для условия Дирихле

$$\int_0^l u(x, t) \sin \frac{\pi m x}{l} dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \int_0^l \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi m x}{l} dx = u_m(t) \frac{l}{2}.$$

То обстоятельство, что

$$\int_0^l \varphi_n \varphi_m dx = 0 \quad n \neq m$$

вовсе не случайно и может быть доказано, исходя из самой задачи на собственные значения.

4. Умножая $L[u] = f$ на φ_m и интегрируя по x от 0 до l , получаем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно u_m . Для

этого несколько раз следует использовать формулу дифференцирования интеграла по параметру

$$\int_0^l v_t \varphi_m(x) dx = \frac{d}{dt} \int_0^l v \varphi_m(x) dx$$

и правило интегрирования по частям

$$\int_0^l v_x \varphi_m(x) dx = v \varphi_m \Big|_{x=0}^l - \int_0^l v_x d\varphi_m(x)$$

Следует заметить, что и для задачи Неймана, и для задачи Дирихле подстановки обратятся в нуль.

5. Умножая начальные условия на φ_m и интегрируя по x от 0 до l , получаем начальные условия для этого обыкновенного дифференциального уравнения.

6. Решив задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, находим $u_m(t)$ и подставляем в ряд (1.10). Если исходная задача имеет решение, то оно обязательно разлагается в такой ряд Фурье, поэтому этот ряд считают формальным решением исходной задачи.

7. Если линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно u_m и начальные условия при некотором номере m оказываются однородными, то $u_m \equiv 0$ и m -ая гармоника отсутствует в ряде Фурье.

7а. Если в ряде Фурье (1.10) присутствует лишь конечное число гармоник, то он вырождается в конечную сумму, доставляющую решение исходной задачи в конечном виде.

7б. Если в ряде Фурье имеется бесконечное число гармоник, то требуется доказать его сходимость, а также возможность почленного дифференцирования прежде, чем утверждать, что он доставляет решение исходной задачи.

Дом. задание.

1. Найдите формальное решение задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) \sin \omega t, & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \end{cases}$$

где f заданная «распределенная» внешняя сила, действующая на струну. При каких частотах ω решение этой задачи, если оно вообще существует, не является периодическим? Ср.: [2], стр. 220-221.

2. Найдите формальное решение задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos \frac{\pi x}{l} e^{-t} \sin \omega t, & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \end{cases}$$

3. Найдите формальное решение задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin \frac{\pi x}{l} e^{-t} \sin \omega t, & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \end{cases}$$

Дом. задание.

3. Докажите единственность решения задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) \sin \omega t, & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \end{cases}$$

где f заданная «распределенная» внешняя сила, действующая на струну. При каких частотах ω решение этой задачи, если оно вообще существует, не является периодическим? Ср.: [2], стр. 220-221.

4. Найдите коэффициенты ряда Фурье, в который можно разложить решение задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} \sin x, & (0 < x < \pi, t > 0) \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

Ср.: [2], стр. 283 № 3.

5. Докажите существование решения задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = 0 \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \end{cases}$$

раскладывая решение в ряд по косинусам; какие условия нужно наложить на φ ?

1.3 Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности на отрезке

1.3.1 Задача о распределении температуры вдоль стержня

Попытаемся создать модель, позволяющую описать изменение со временем распределения температуры u вдоль однородного стержня длины l .¹³

Согласно *закону Фурье* количество тепла, протекающего в направлении оси Ox через сечение площади S за промежуток времени от t до $t + dt$ равно

$$dQ = -k \frac{\partial u}{\partial x} S dt, \quad (1.11)$$

где k – коэффициент теплопроводности, зависящий от материала стержня. Знак минус в этой формуле означает, что тепловой поток направлен в ту сторону, где температура меньше.

Количество тепла, которое необходимо сообщить куску стержня $x_1 < x < x_2$, для того, чтобы повысить его температуру на du , равно

$$dQ = c\rho(x_2 - x_1)du,$$

где ρ – плотность стержня, а c – его удельная теплоемкость.

Если к внутренним точкам стержня не подводится тепло из окружающей среды, то изменение количества тепла, имевшегося в куске $x_1 < x < x_2$ может происходить только за счет притока или оттока тепла через его концы $x = x_1$ и $x = x_2$. Составим уравнение теплового баланса: за время dt этот кусок приобретает тепла

$$c\rho(x_2 - x_1)du = k \frac{\partial u}{\partial x} S dt \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x} S dt \Big|_{x=x_1}.$$

Знаки в правой части берутся такими, поскольку формула (2.1) дает поток по направлению Ox , то есть при $x = x_1$ во внутрь куска $x_1 < x < x_2$, а при

¹³Как обычно, ось Ox направим вдоль стержня так, чтобы точки $x = 0$ и $x = l$ оказались концами стержня, за начальный момент времени примем $t = 0$.

$x = x_2$ во вне. Отсюда в силу формулы конечных приращений

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Таким образом, динамика распределения температуры вдоль стержня описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}},$$

которое называют уравнением теплопроводности.

Задачи теплопроводности допускают различные физически осмысленные граничные условия на концах стержня:

1. Условие Дирихле $u|_{x=l} = \mu(t)$ означает, что на границе $x = l$ известен закон изменения температуры (чаще всего поддерживается постоянная температура, то есть $u|_{x=l} = u_0$).

2. Условие Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=l} = \nu(t)$$

означает, что известен поток тепла через границу, который по закону Фурье равен $-ku_x$. Чаще всего известно, что конец стержня изолирован от окружающей среды и поэтому поток тепла через него равен нулю.

3. Наконец, условие третьего рода

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -h(u - \theta)$$

соответствует теплообмену с окружающей средой по закону Ньютона. Согласно последнему поток тепла пропорционален разности температуры стержня u и температуры окружающей среды θ . Коэффициент пропорциональности h называют коэффициентом теплообмена.

1.3.2 Примеры начально-краевых задач

Начально-краевая задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = T_1, \end{cases}$$

описывает динамику распределения температуры в стержне, концы которого поддерживаются при постоянной температуре, а начальное распределение температуры в котором известно. Эта задача может быть легко решена методом Фурье. Замена переменной

$$v = u - \frac{x}{l}T_1$$

сводит ее к задаче с однородными граничными условиями

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & (0 < x < l, t > 0) \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - T_1 \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \end{cases}$$

В силу теоремы Стеклова ее решение, если оно вообще существует, может быть разложено в ряд

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Как обычно, для коэффициентов получается задача Коши

$$\{\dot{v}_n = -\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 v_n, \quad v_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l (\varphi(x) - T_1) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \psi_n,$$

откуда

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

В общем случае задачи теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \text{неоднородные граничные условия} \end{cases}$$

решаются в два действия: сначала заменой $v = u - w$ приходят к задаче с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f, & (0 < x < l, t > 0) \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - w \\ \text{однородные граничные условия} \end{cases}$$

а затем решают эту задачу методом Фурье. Изложенная выше общая схема не требует изменений, более того, все отличие от случая колебаний струны состоит в том, что для коэффициентов Фурье получается обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Именно поэтому к уравнению колебаний добавляют два начальных условия, а к уравнению теплопроводности – одно.

1.3.3 Начальные задачи на прямой, формула Пуассона

Пример

Обратимся для начала к простейшей задаче на прямой:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x \in \mathbb{R}, t > 0) \\ u|_{t=0} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1.12)$$

Ее условия можно интерпретировать так: имеется очень длинный стержень, половина которого имела в начальный момент температуру $+1$, а вторая половина -1 , а хочется понять, как со временем размывается граница между двумя этими областями.

Эта задача решается совсем просто, если подметить одно общее свойство решений: если $u(x, t)$ – решение уравнения теплопроводности, то и $u(kx, k^2t)$ – тоже вообще говоря другое решение (здесь $k > 0$ – произвольная постоянная). В таких случаях говорят, что решение переходит в решение при масштабных преобразованиях. Конкретно, решение задачи (1.12)

переходит в решение той же задачи, поскольку

$$u(kx, k^2t)|_{t=0} = u(kx, 0) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Полагая очевидным единственность решения задачи (см. ниже), имеем для любого k и любых x, t тождество

$$u(x, t) = u(kx, k^2t) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Полагая

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

и подставляя найденное выражение в уравнение теплопроводности, имеем

$$\Phi' x t^{-3/2} \left(-\frac{1}{2}\right) = a^2 \Phi'' t^{-1},$$

то есть

$$\Phi'' = -\frac{\xi}{2a^2} \Phi',$$

где штрихами обозначены производные по ξ . Общее решение этого обыкновенного дифференциального уравнения есть

$$\Phi = C_1 \operatorname{Erf} \frac{\xi}{2a^2} + C_2,$$

где Erf – интеграл ошибок

$$\operatorname{Erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-t^2} dt.$$

Остается заметить, что

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \operatorname{Erf}(\xi) = \pm 1,$$

поэтому

$$u = \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a^2 \sqrt{t}} \right).$$

доставляет решение исходной задачи (1.12).

На рис. 1.12 представлен график интеграла ошибок, профиль распределения температур в исходной задаче при любом фиксированном t всегда

имеет такой вид, только с увеличением t «переходный слой» становится все шире и шире, что можно интерпретировать как четко размытые температурного фронта, имевшегося при $t = 0$.

Общий случай

Если φ – ограниченная непрерывная функция, то начальная задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x \in \mathbb{R}, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi \end{cases}$$

имеет и притом одно решение¹⁴, которое доставляет *формула Пуассона*

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi.$$

С тем, чтобы не иметь проблем со сходимостью этого интеграла, обычно предполагают, что φ – непрерывная ограниченная функция, хотя эти условия можно существенно ослабить.

Мы не станем останавливаться на доказательстве всего этого утверждения, указав лишь на один важный для дальнейшего момент. Если исходный профиль распределения температур имел какие либо изломы, то со временем они должны сглаживаться. Поэтому формула $u|_{t=0} = \varphi$ или, более развернуто,

$$\varphi(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi.$$

означает в частности, что любую функцию φ можно приблизить сколь угодно точно гладкой функцией $u(x, t)$. Это обстоятельство Вейерштрасс положил в основу своей теории аппроксимации функций, имеющую в связи с этим «термодинамическую» подоплеку.

¹⁴Когда речь идет о классическом решении, предполагается, что u непрерывны в области $\{t \geq 0\}$, а вторые производные существуют и непрерывны хотя бы в $\{t > 0\}$.

Теорема 6. Пусть ψ – четная положительная непрерывная функция и

$$\int_0^{\infty} \psi(x) dx = \eta,$$

тогда для любой кусочно-непрерывной¹⁵ ограниченной функции f верно

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2\eta k} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{x-y}{k}\right) f(y) dy.$$

Дом. задание. 1. Найдите решение задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x \in \mathbb{R}, t > 0) \\ u|_{t=0} = \begin{cases} T_1, & x > 0 \\ T_2, & x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

2. Найдите решения вида $u = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ нелинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3. Докажите прямой подстановкой, что $u = e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$ является решением уравнения теплопроводности (при любом постоянном ξ). Как использовать этот факт для доказательства того, что формула Пуассона доставляет решение уравнения теплопроводности.

¹⁵т.е. функции, которая на любом конечном интервале имеет конечное число разрывов первого рода.

Глава 2

Уравнения Лапласа

В \mathbb{R}^n дифференциальный оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

называют *оператором Лапласа* и обозначают как Δ_n или просто Δ . Как известно из курса Анализа, при $n = 2$ и $n = 3$ для любой гладкой функции u верно

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = (\nabla, \nabla)u.$$

Уравнение $\Delta u = 0$ называют *уравнением Лапласа*, а уравнение вида $\Delta u = f$ – *уравнение Пуассона* (здесь f – заданная функция, т.н. правая часть уравнения Пуассона). Наконец, функцию, удовлетворяющую в области Ω уравнению Лапласа, называют *гармонической*. При этом обычно прибавляют, что эта функция должна быть непрерывной в замыкании $\bar{\Omega}$ и иметь непрерывные производные 2-го порядка по всем переменным в области Ω .

2.1 Стационарное распределение температуры в теле

Уравнение Лапласа появляется при моделировании самых разнообразных физических процессов. Более того, можно предвидеть многие свойства краевых задач для уравнения Лапласа, если связать его с задачей о стационарном распределении температуры в теле.

Попытаемся создать модель, позволяющую описать стационарное распределение температуры u в теле Ω произвольной формы. С этой целью рассмотрим произвольный малый куб V , вписанный в это тело. Количество тепла, протекающего через грань куба, тем больше, чем сильнее изменение температуры вдоль нормали к грани. Согласно *закону Фурье* эта зависимость линейная, то есть за промежуток времени от t до $t + dt$ через грань площади S протекает

$$dQ = -k \frac{\partial u}{\partial n} S dt, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} = (\text{grad} u, n) \right) \quad (2.1)$$

где k – коэффициент теплопроводности, зависящий от материала тела, n – внешняя нормаль к грани¹, а производная берется в какой либо точки рассматриваемой грани. Если распределение температуры не зависит от времени, то суммарный поток через все грани куба должен быть равен нулю:

$$\int_{\partial V} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0.$$

В силу теоремы Гаусса-Остроградского

$$\int_{\partial V} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int_{\partial V} (\text{grad} u, n) d\sigma = \int_V \text{div grad} u d\tau,$$

и, поскольку куб V – произвольный, распределение температуры u должно удовлетворять уравнению Лапласа

$$\text{div grad} u = 0.$$

Двумерное уравнение Лапласа не трудно связать с задачей о распределении температуры в цилиндре в том случае, когда есть основания считать, что температура не меняется вдоль его оси. В самом деле, в этом случае температура удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

на любом нормальном сечении цилиндра.

¹Здесь и далее n всегда будет внешней и единичной нормалью к рассматриваемому телу.

2.2 Первая краевая задача для уравнения Лапласа

Задачу с условиями Дирихле (или, как еще говорят, первую краевую задачу для уравнения Лапласа)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (\text{в области } \Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \quad (2.2)$$

можно интерпретировать как задачу об отыскании стационарного распределения температуры внутри тела Ω по известному распределению $u = f$ температуры на границе. *Классическое решение* этой задачи должно быть функцией, которая дважды непрерывно дифференцируема в открытой области Ω и хотя бы непрерывна в ее замыкании $\bar{\Omega}$.

К этой задаче не требуется добавлять дополнительных условий, поскольку и так (2.2) *не допускает двух различных решений*. В самом деле, в противном случае разность w двух решений удовлетворяла бы однородной задаче

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & (\text{в области } \Omega) \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Умножая уравнение $\Delta w = 0$ на w и интегрируя по Ω , получим, что

$$\int_{\Omega} w \Delta w d\tau = 0.$$

Но

$$w \Delta w = w \operatorname{div}(\operatorname{grad} w) = \operatorname{div}(w \operatorname{grad} w) - (\operatorname{grad} w, \operatorname{grad} w),$$

и по теореме Гаусса-Остроградского²

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(w \operatorname{grad} w) d\tau = \int_{\partial\Omega} (w \operatorname{grad} w, n) d\tau = 0,$$

поскольку на границе области $w = 0$. Но тогда как следствие $\Delta w = 0$ мы имеем

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} w, \operatorname{grad} w) d\tau = 0,$$

²Применение этой теоремы подразумевает наложение известных из курса Анализа условий на гладкость границы области Ω . См., [ФГМ], т. 3, по. 651

что в силу $(\text{grad}w, \text{grad}w) \geq 0$ возможно лишь при $\text{grad}w = 0$. Это означает, что w постоянная функция, равная нулю на границе рассматриваемой области, то есть w тождественно равна нулю.

Из физических соображений очевидно, что температура не может оказаться внутри тела выше, чем на его границе. Это утверждение называют *принципом максимума* и выражают так: гармоническая функция достигает своих минимальных и максимальных значений на границе своей области определения.³ В частности, для нахождения границ, в которых меняется решение задачи (2.2), не требуется ее решать: во всех точках тела Ω верно

$$\inf_{\partial\Omega} f < u < \sup_{\partial\Omega} f.$$

Из принципа максимумов сразу следует *устойчивость решения* (2.2) по отношению к малым возмущениям распределения входных данных, то есть распределения температуры f на границе области: если u_1 и u_2 – гармонические функции и на границе тела значения u_1 и u_2 различаются не более чем на δ , то и внутри области $|u_1 - u_2| \leq \delta$.

Значительные трудности доставляет доказательство существования решения задачи (2.2). Средствами теории интегральных уравнений Фредгольма удается доказать, что *эта задача имеет классическое решение, если граница области Ω является гладкой поверхностью, а функция f непрерывна вдоль этой границы*.⁴ Впрочем, простейшие тела – куб и конус – не имеют гладкой поверхности, поэтому часто задачу (2.2) решают для областей, не подпадающих под эту классическую теорему существования. По всей видимости эта задача допускает обобщенное в том или ином

³Строгое доказательство принципа максимума см. в [1], гл. V, §1.

⁴Обычно принимают, что поверхность является поверхностью Ляпунова, то есть 1) в каждой ее точке можно провести касательную плоскость, на которую однозначно проектируется кусок поверхности, лежащий в малой окрестности этой точки, и 2) угол γ между нормальными, проведенными в двух точках P_1 и P_2 , удовлетворяет неравенству

$$|\gamma| \leq \text{Const}|P_1P_2|^\delta \quad (0 < \delta).$$

См. СБК, гл. V, §6-7.

смысле решение всегда, даже тогда, когда границу тяжело признать поверхностью.⁵

Абсолютно аналогично задачу с условиями Дирихле в двумерной области Ω

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (\text{в области } \Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

можно интерпретировать как задачу об отыскании стационарного распределения температуры внутри цилиндра, сечением которого служит Ω , по известному распределению $u = f$ температуры на границе, не меняющемуся вдоль оси цилиндра. Все предыдущие выкладки сохраняют свою силу с той лишь поправкой, что $d\tau$ теперь следует считать элементом площади Ω , а $d\sigma$ – элементом длины кривой $\partial\Omega$. Поэтому *решение этой задачи, если оно вообще существует, единственно и достигает своих максимальных и минимальных значений на границе $\partial\Omega$* . Наконец, *эта задача имеет классическое решение, если граница области Ω является гладкой кривой, а функция f непрерывна вдоль этой границы*.

2.2.1 Первая краевая задача в круге

Проиллюстрируем сказанное явным построением решения для простейшего частного случая, когда Ω представляет собой круг радиуса a . Поместим начало координат в его центр, введем полярные координаты r, φ и обратимся к задаче

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (r < a) \\ u|_{r=a} = f(\varphi) \end{cases} \quad (2.3)$$

Поскольку окружность – гладкая кривая, эта задача имеет и притом единственное классическое решение, если f является непрерывной функцией переменной φ . Это решение любом фиксированном $r < a$ является дифференцируемой периодической функцией φ , поэтому его можно разложить в

⁵Особенно продвинутые результаты в этом направлении получены для случая плоских областей, см. теорему Перона, напр., у Камке.

ряд Фурье

$$u = \frac{u_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r) \cos(n\varphi) + v_n(r) \sin(n\varphi),$$

коэффициенты которого даются формулами

$$u_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \dots$$

Для отыскания обыкновенного дифференциального уравнения для u_n нужно вспомнить, что в полярной системе координат верно

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Умножая $\Delta u = 0$ на $\cos(n\varphi)$ и интегрируя по φ , имеем

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r u \cos(n\varphi) d\varphi + \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cos(n\varphi) d\varphi = 0$$

или, вынося производные по r за знак интеграла и избавляясь от производных по φ интегрированием по частям,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_n}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} u_n = 0$$

или

$$r^2 u_n'' + r u_n' - n^2 u_n = 0.$$

Это – линейное дифференциальное уравнение Эйлера, частные решения которого можно подобрать в виде r^α . Для отыскания α получается квадратное уравнение

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = 0,$$

решением которого служат $\alpha = \pm n$. Поэтому при $n > 0$ общим решением является

$$C_1 r^n + C_2 r^{-n}.$$

Коль скоро u – гладкая функция в нуле, то и

$$u_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi$$

имеет в нуле конечный предел. Поэтому

$$u_n(r) = Cr^n$$

и для отыскания одной константы вполне достаточно одного условия $u|_{r=a} = f$. Из него сразу получаем

$$u_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cos(n\varphi) d\varphi = a_n,$$

обозначив через a_n – коэффициент ряда Фурье для функции f . В итоге получается, что

$$u_n = a_n \left(\frac{r}{a}\right)^n.$$

При $n = 0$ относительно $y = u'_0$ получается линейное уравнение первого порядка

$$ry' + y = 0,$$

общим решением которого служит $y = C_1 r^{-1}$, поэтому

$$u_0 = C_1 \ln r + C_2.$$

Из ограниченности u в нуле получаем, что u_0 является постоянной, которая, конечно, в силу граничного условия должна совпадать с a_0 . Продолжая аналогичные действия с v_n и подставляя все в ряд для u , в итоге получим

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi))$$

Таким образом, для того, чтобы решить задачу (2.3), следует найти коэффициенты ряда Фурье для f по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cos(n\varphi) d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \sin(n\varphi) d\varphi,$$

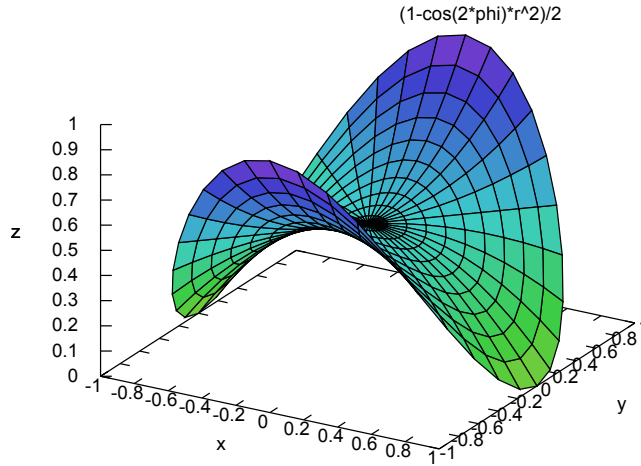


Рис. 2.1: График функции $u = \frac{1-r^2 \cos(2\varphi)}{2}$.

и выписать

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi))$$

Замечание 1. – Непрерывности f не гарантирует возможность разложения этой функции в ряд Фурье

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi),$$

но на практике часто, напротив, функцию f легче разложить в ряд Фурье, чем считать a_n и b_n по приведенным выше формулам.

Напр., для

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (r < 1) \\ u|_{r=1} = y^2 \end{cases}$$

имеем

$$y^2 = \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2}$$

и поэтому

$$u = \frac{1 - r^2 \cos(2\varphi)}{2} = \frac{1 - x^2 + y^2}{2}.$$

На графике этой функции (рис. 2.1) хорошо видно, что решение не имеет точек экстремума, зато в нуле у него имеется седловая точка.

Замечание 2. – В старые времена получение выражение для лапласиана в полярной системе координат представляло известные вычислительные трудности, которые обходили весьма изящно при помощи коэффициентов Ламе. Нынче проще задачу решить в лоб. Итак, по правилу дифференцирования сложной функции

$$u_x = u_r r_x + u_\varphi \varphi_x, \quad u_y = u_r r_y + u_\varphi \varphi_y$$

откуда далее

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr}(r_x^2 + r_y^2) + 2u_{r\varphi}(r_x \varphi_x + r_y \varphi_y) + u_{\varphi\varphi}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + u_r \Delta r + u_\varphi \Delta \varphi.$$

Производные за нас вычислить Giac:

$$\boxed{1} \text{ r:=sqrt(x^2+y^2);}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{2} \text{ phi:=arctan(y/x);}$$

$$\text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\boxed{3} \text{ simplify((diff(r,x))^2+(diff(r,y))^2);}$$

$$1$$

$$\boxed{4} \text{ simplify((diff(phi,x))^2+(diff(phi,y))^2);}$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{5} \text{ 2*simplify(diff(r,x)*diff(phi,x)+diff(r,y)*diff(phi,y));}$$

$$0$$

$$\boxed{6} \text{ simplify(diff(r,x^2)+diff(r,y^2));}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{7} \text{ simplify(diff(phi,x^2)+diff(phi,y^2));}$$

$$0$$

Итого:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

что и утверждалось выше.

2.2.2 Первая краевая задача в прямоугольнике

Обратимся теперь к частному случаю, когда Ω – прямоугольник со сторонами a и b . При надлежащем выборе декартовой системы координат первую краевую задачу можно записать так:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u|_{x=0} = \varphi_1(y), & u|_{x=a} = \varphi_2(y), \\ u|_{y=0} = \psi_1(x), & u|_{y=b} = \psi_2(x). \end{cases} \quad (2.4)$$

Разложению решению в ряд Фурье в данном случае приходится предполагать некоторые приготовления.

1. Краевые условия должны быть согласованы в углах прямоугольника:

$$\begin{cases} u(0, 0) = \varphi_1(0) = \psi_1(0), \\ u(a, 0) = \varphi_2(0) = \psi_1(a), \\ u(0, b) = \varphi_1(a) = \psi_2(0), \\ u(a, b) = \varphi_2(b) = \psi_2(a) \end{cases}$$

Подберем коэффициенты A, B, C, D гармонической функции $w(x, y) = A + Bx + Cy + Dxy$ так, чтобы в углах прямоугольника она принимала те же значения, что и u . Для этого нужно решить систему 4-х линейных уравнений

$$\begin{cases} w(0, 0) = \varphi_1(0) = \psi_1(0), \\ w(a, 0) = \varphi_2(0) = \psi_1(a), \\ w(0, b) = \varphi_1(a) = \psi_2(0), \\ w(a, b) = \varphi_2(b) = \psi_2(a) \end{cases}$$

относительно четырех неизвестных A, B, C, D .

2. Сделать замену переменной $v = u - w$:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ v|_{x=0} = \varphi_1(y) - w(0, y), & v|_{x=a} = \varphi_2(y) - w(a, y), \\ v|_{y=0} = \psi_1(x) - w(x, 0), & v|_{y=b} = \psi_2(x) - w(y, b). \end{cases}$$

3. Решением v этой задачи будет сумма решений v_1 и v_2 задач

$$\begin{cases} \Delta v_1 = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ v_1|_{x=0} = \varphi_1(y) - w(0, y), & v_1|_{x=a} = \varphi_2(y) - w(a, y), \\ v_1|_{y=0} = 0, & v_1|_{y=b} = 0. \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \Delta v_2 = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ v_2|_{x=0} = 0, & v_2|_{x=a} = 0, \\ v_2|_{y=0} = \psi_1(x) - w(x, 0), & v_2|_{y=b} = \psi_2(x) - w(y, b). \end{cases}$$

(Благодаря выделению w краевые условия в обеих задачах согласованы в углах прямоугольника)

4. Классическое решение задачи для v_1 , если оно вообще существует, разлагается в ряд Фурье

$$v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} v_{1,n}(x) \sin \frac{\pi n y}{b},$$

где

$$v_{1,n} = \frac{2}{b} \int_0^b v_1(x, y) \sin \frac{\pi n y}{b} dy;$$

для отыскания его коэффициентов обычным путем получается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 v_{1,n}}{dx^2} - \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 v_{1,n} = 0,$$

общим решением которого служит

$$v_{1,n} = C_1 \operatorname{sh} \frac{\pi n x}{b} + C_2 \operatorname{sh} \frac{\pi n (a - x)}{b}.$$

При $x = 0$ мы имеем

$$C_2 \operatorname{sh} \frac{\pi n a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b (\varphi_1(y) - w(0, y)) \sin \frac{\pi n y}{b} dy,$$

а при $x = a$

$$C_1 \operatorname{sh} \frac{\pi n a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b (\varphi_2(y) - w(a, y)) \sin \frac{\pi n y}{b} dy.$$

Поэтому решение задачи для v_1 , если оно вообще существует, дается рядом

$$v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2,n} \operatorname{sh} \frac{\pi n x}{b} + \varphi_{1,n} \operatorname{sh} \frac{\pi n(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi n a}{b}} \sin \frac{\pi n y}{b},$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{1,n} &= \frac{2}{b} \int_0^b (\varphi_1(y) - w(0, y)) \sin \frac{\pi n y}{b} dy, \\ \varphi_{2,n} &= \frac{2}{b} \int_0^b (\varphi_2(y) - w(a, y)) \sin \frac{\pi n y}{b} dy, \end{aligned}$$

5. Аналогично, решение задачи для v_2 , если оно вообще существует, дается рядом

$$v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_{2,n} \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{a} + \psi_{1,n} \operatorname{sh} \frac{\pi n(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi n b}{a}} \sin \frac{\pi n x}{a},$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{1,n} &= \frac{2}{a} \int_0^a (\psi_1(x) - w(x, 0)) \sin \frac{\pi n x}{a} dx, \\ \psi_{2,n} &= \frac{2}{b} \int_0^b (\psi_2(x) - w(x, b)) \sin \frac{\pi n x}{a} dx, \end{aligned}$$

Дом. задание.

1. При каких f решение задачи (2.3) имеет седловую точку в центре круга?
2. Разложите в ряд Фурье решение первой краевой задачи в кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (a < r < b) \\ u|_{r=a} = f_1(\varphi), & u|_{r=b} = f_2(\varphi). \end{cases}$$

3. Найдите решение задачи в кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (a < r < b) \\ u|_{r=a} = 0, & u|_{r=b} = \cos^2(\varphi). \end{cases}$$

4. Докажите след. утверждение: если гармоническая в прямоугольнике функция u является линейной на его границе, то она имеет вид $u = A + Bx + Cy + Dxy$. Иными словами, если функции φ_i и ψ_i являются линейными функциями своих аргументов, то решение первой краевой задачи в прямоугольнике

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u|_{x=0} = \varphi_1(y), & u|_{x=a} = \varphi_2(y), \\ u|_{y=0} = \psi_1(x), & u|_{y=b} = \psi_2(x). \end{cases}$$

имеет вид $u = A + Bx + Cy + Dxy$.

5.* Если при решении задачи в квадрате пропустить первый шаг, то решение удастся разложить в некоторые ряды. Напр., задача

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (\text{в прямоугольнике } 0 < x < 1, 0 < y < 1), \\ u|_{x=0} = 0, & u|_{y=0} = 0 \\ u|_{x=1} = y, & u|_{y=1} = x. \end{cases}$$

имеет решением функцию $u = xy$. Если, однако, пропустить первый шаг и сразу написать $u = u_1 + u_2$, где

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \\ u_1|_{x=0} = 0, & u_1|_{x=1} = 0 \\ u_1|_{y=0} = 0, & u_1|_{y=1} = x. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \Delta u_2 = 0 \\ u_2|_{y=0} = 0, & u_2|_{y=1} = 0, \\ u_2|_{x=0} = 0, & u_2|_{x=1} = y. \end{cases}$$

то решение первой окажется рядом по $\sin \pi nx$, а второй – рядом по $\sin \pi my$. Сравните частичные суммы этих рядов с точным решением $u = xy$.

2.3 Вторая краевая задача для уравнения Лапласа

Задачу с условиями Неймана (или, как еще говорят, вторую краевую задачу для уравнения Лапласа)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (\text{в области } \Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = f \end{cases} \quad (2.5)$$

можно интерпретировать как задачу об отыскании стационарного распределения температуры внутри тела Ω по известному потоку тепла через его границу. *Классическое решение* этой задачи должно быть функцией, которая дважды непрерывно дифференцируема в открытой области Ω и хотя бы непрерывно дифференцируема в ее замыкании $\bar{\Omega}$.

Решение задачи (2.5) не единственно, но определено с точностью до аддитивной постоянной. Для доказательства достаточно повторить выкладки, сделанные при доказательстве единственности первой краевой задачи. Только интеграл

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(w \operatorname{grad} w) d\tau = \int_{\partial \Omega} (w \operatorname{grad} w, n) d\tau = 0,$$

обратиться теперь в нуль из-за того, что на границе области

$$(\operatorname{grad} w, n) = \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

В итоге получится, что градиент разности двух решений u_1 и u_2 равен нулю, откуда $u_1 - u_2 = C$.

Из физических соображений очевидно, что стационарное распределение температуры невозможно, если через полную границу тела имеется ненулевой поток тепла. Этот поток пропорционален

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \oint_{\partial\Omega} f d\sigma.$$

Поэтому *вторая краевая задача не имеет решения, если*

$$\oint_{\partial\Omega} f d\sigma \neq 0.$$

Средствами теории интегральных уравнений Фредгольма⁶ удастся доказать, что *вторая краевая задача имеет классическое решение, если граница области Ω является гладкой поверхностью, а функция f непрерывна вдоль этой границы и удовлетворяет условию*

$$\oint_{\partial\Omega} f d\sigma = 0.$$

2.3.1 Вторая краевая задача в круге

Сказанное опять удобно проиллюстрировать, рассмотрев задачу в круге:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (r < a) \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = f(\varphi) \end{cases} \quad (2.6)$$

Эта задача имеет и притом определенное с точностью до константы классическое решение, если f является непрерывной функцией переменной φ

и

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0.$$

⁶См. [1], гл. V, §7.

При любом фиксированном $r < a$ это решение является дифференцируемой периодической функцией φ , поэтому его можно разложить в ряд Фурье

$$u = \frac{u_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r) \cos(n\varphi) + v_n(r) \sin(n\varphi),$$

коэффициенты которого даются формулами

$$u_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad v_n = \dots$$

Специфические трудности возникают только при нахождении u_0 . Проинтегрируем $\Delta u = 0$ по φ :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r u d\varphi + \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} d\varphi = 0$$

откуда, вынося производные по r за знак интеграла и избавляясь от производных по φ интегрированием, имеем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_0}{dr} \right) = 0$$

Поэтому

$$r \frac{du_0}{dr} = 1$$

и

$$u_0 = C_1 \ln r + C_2.$$

Ограниченность u в нуле дает $C_1 = 0$, поэтому

$$u_0(r) = C.$$

Специфика ситуации состоит в том, что граничное условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = f(\varphi)$$

не позволяет определить эту константу. Вместо этого оно дает

$$0 = u'_0(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f d\varphi,$$

то есть еще раз указывает на

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f d\varphi = 0$$

как на необходимое условие разрешимости задачи, а также на то, что решение второй определено с точностью до константы.

Для нахождения u_n , умножив $\Delta u = 0$ на $\cos(n\varphi)$ и проинтегрировав по φ , опять получим уравнение Эйлера

$$r^2 u_n'' + r u_n' - n^2 u_n = 0,$$

общим решением которого является

$$C_1 r^n + C_2 r^{-n}.$$

В силу ограниченности u в нуле

$$u_n(r) = C r^n.$$

Для отыскания константы из граничного условия имеем

$$u_n'(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cos(n\varphi) d\varphi = a_n,$$

обозначив через a_n – коэффициент ряда Фурье для функции f . В итоге получается, что

$$u_n = a_n \frac{r^n}{n a^{n-1}}.$$

Продельвая аналогичные действия с v_n и подставляя все в ряд для u , в итоге получим

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n a^{n-1}} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) + \text{Const}.$$

Таким образом, для того, чтобы решить задачу (2.3), следует найти коэффициенты ряда Фурье для f по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cos(n\varphi) d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \sin(n\varphi) d\varphi,$$

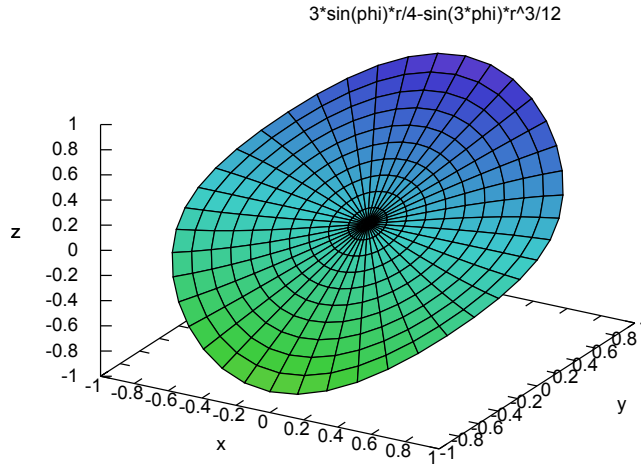


Рис. 2.2: График функции $u = \frac{3}{4}r \sin \varphi - \frac{1}{12}r^3 \sin 3\varphi$.

И ВЫПИСАТЬ

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n a^{n-1}} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) + \text{Const.}$$

Напр., для

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (r < 1) \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = y^3 \end{cases}$$

ИМЕЕМ

$$y^3 = \sin^3 \varphi = \frac{3 \sin \varphi - \sin 3\varphi}{4}$$

И ПОЭТОМУ

$$u = \frac{3}{4}r \sin \varphi - \frac{1}{12}r^3 \sin 3\varphi + \text{Const.}$$

Поскольку u – гармоническая функция, она принимает максимальные и минимальные значения на границе, что хорошо видно на графике этой функции (рис. 2.2).

Часто в практических задачах интересно не полное распределение температуры, а ее максимальные значения. Напр., пусть известно, что в центре цилиндра температура равна нулю ($\text{Const}=0$), а важно узнать не расплавится ли цилиндр, если через его границы будет проходить заданный поток

тепла. Максимальное значение, которое принимает u , можно вычислить, отыскав максимум u

$$u(1, \varphi) = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{12} \sin 3\varphi.$$

Производная

$$\begin{aligned} \frac{du(1, \varphi)}{d\psi} &= \frac{3}{4} \cos \varphi - \frac{1}{4} \cos 3\varphi = \frac{1}{4} (3 \cos \varphi - \cos^3 \varphi + 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi) \\ &= \left(\frac{3}{2} - \cos^2 \varphi \right) \cos \varphi, \end{aligned}$$

меняет знаки при $\varphi = \pi/2$ (max) и $\varphi = 3\pi/2$ (min). Поэтому максимальное значение u равно

$$u_{\max} = \frac{3}{4} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{12} \sin \frac{3\pi}{2} = \frac{5}{6} = 0.8(3).$$

Дом. задание. 1. В каких границах меняется решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (r < 1) \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = xy? \end{cases}$$

2. При каких n задача

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (r < 1) \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = x^n \end{cases}$$

имеет решения?

2.4 Третья краевая задача для уравнения Лапласа

Третью краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (\text{в области } \Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial n} + hu \Big|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \quad (2.7)$$

можно интерпретировать как задачу об отыскании стационарного распределения температуры внутри тела Ω по известной температуре окружающей его среды. В самом деле, согласно закону Ньютона (см. стр. 50) поток тепла через малый кусок границы $d\sigma$ пропорционален разности температуры тела u и окружающей среды θ , т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -h(u - \theta);$$

коэффициент теплообмена h должен быть положительным: тепло вытекает из тела, если вблизи границы в теле

$$\frac{\partial u}{\partial n} < 0,$$

а вне него $u > \theta$.

Классическое решение этой задачи должно быть функцией, которая дважды непрерывно дифференцируема в открытой области Ω и хотя бы непрерывно дифференцируема в ее замыкании $\bar{\Omega}$.

При $h > 0$ задача (2.7) *не допускает двух различных решений*. В самом деле, в противном случае разность w двух решений удовлетворяла бы однородной задаче

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & (\text{в области } \Omega) \\ \frac{\partial w}{\partial n} + hw|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Опять умножая уравнение $\Delta w = 0$ на w и интегрируя по Ω , получим, что

$$\int_{\Omega} w \Delta w d\tau = 0.$$

Как и ранее

$$w \Delta w = w \operatorname{div}(\operatorname{grad} w) = \operatorname{div}(w \operatorname{grad} w) - (\operatorname{grad} w, \operatorname{grad} w),$$

но теперь по теореме Гаусса-Остроградского

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(w \operatorname{grad} w) d\tau = \oint_{\partial\Omega} (w \operatorname{grad} w, n) d\sigma = -h \oint_{\partial\Omega} w^2 d\sigma,$$

поскольку на границе области верно

$$\frac{\partial w}{\partial n} = -hw.$$

Таким образом, как следствие $\Delta w = 0$ мы имеем

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} w, \operatorname{grad} w) d\tau + h \oint_{\partial\Omega} w^2 d\sigma = 0,$$

что в силу $(\operatorname{grad} w, \operatorname{grad} w) \geq 0$ и $w^2 \geq 0$ возможно лишь при $\operatorname{grad} w = 0$ в Ω и $w = 0$ на ее границе. Это означает, что функция w тождественно равна нулю.

Доказательство существования классического решения у третьей краевой задачи классическими способами требует еще больших усилий и, вероятно, проще перейти к уравнению Пуассона с однородными граничными условиями и доказать для него существование обобщенного решения⁷.

2.4.1 Третья краевая задача в круге

Решение третьей краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (r < a) \\ \frac{\partial u}{\partial r} + hu|_{r=a} = f(\varphi) \end{cases} \quad (2.8)$$

повторяет в существенном решение первой. При любом фиксированном $r < a$ решение этой задачи является дифференцируемой периодической функцией φ , поэтому его можно разложить в ряд Фурье

$$u = \frac{u_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r) \cos(n\varphi) + v_n(r) \sin(n\varphi),$$

коэффициенты которого даются формулами

$$u_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad v_n = \dots$$

Никаких трудностей с коэффициентом u_0 теперь не возникает: как и раньше он удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_0}{dr} \right) = 0$$

и поэтому

$$u_0 = C_1 \ln r + C_2.$$

Ограниченность u в нуле дает $C_1 = 0$, а граничное условие

$$\frac{\partial u}{\partial r} + hu \Big|_{r=a} = f(\varphi)$$

⁷См., напр., [5], гл. 2, §5.

позволяет определить эту константу:

$$u_0'(a) + hu_0(a) = hC_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f d\varphi = a_0,$$

то есть

$$u_0(r) = C_2 = \frac{a_0}{h}$$

Аналогично, u_n удовлетворяет уравнению Эйлера

$$r^2 u_n'' + r u_n' - n^2 u_n = 0,$$

следовательно,

$$u_n(r) = Cr^n.$$

Из граничного условия имеем

$$u_n'(a) + hu_n(a) = C(na^{n-1} + ha^n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cos(n\varphi) d\varphi = a_n,$$

поэтому

$$u_n = a_n \frac{r^n}{(n + ah)a^{n-1}}.$$

Появившейся в знаменателе множитель $n + ah$ не обращается в нуль, если $h > 0$. Прodelывая аналогичные действия с v_n и подставляя все в ряд для u , в итоге получим

$$u = \frac{a_0}{2h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n + ah)a^{n-1}} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)).$$

Таким образом, для того, чтобы решить задачу (2.3), следует найти коэффициенты ряда Фурье для f по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cos(n\varphi) d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \sin(n\varphi) d\varphi,$$

и выписать

$$u = \frac{a_0}{2h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n + ah)a^{n-1}} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)).$$

Напр., для

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (r < 1) \\ \frac{\partial u}{\partial r} + hu|_{r=1} = y \end{cases}$$

имеем

$$y = \sin \varphi$$

и поэтому

$$u = \frac{1}{1+h} r \sin \varphi$$

При $h = 0$ решение стремится к решению второй краевой задачи, а при $h \rightarrow +\infty$ решение равномерно в Ω стремится к нулю.

Дом. задание. Найдите решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (r < 1) \\ \frac{\partial u}{\partial r} + u|_{r=1} = y^2 \end{cases}$$

Глава 3

Метод конечных элементов на примере первой краевой задачи для уравнения Пуассона

Выше мы никак не касались вопроса о том, как можно хотя бы приближенно найти решение краевых задач в произвольной области. В случае круга и прямоугольника было вполне понятно, по каким функциям вести разложение. Однако для произвольной области указать подходящий набор функций удалось лишь в 1940-х годах, когда появился абрис того, что теперь называют методом конечных элементов и открытие которого обычно связывают с именем Рихарда Куранта¹. Название – метод конечных элементов – было предложено Клафом в середине 1960-х годов².

Рост популярности МКЭ в последние десятилетия во многом объясняется удобством его реализации на персональном компьютере. В настоящее время имеется несколько компьютерных программ, предназначенных для работы с конечными элементами (FEA Software); из платных стоит назвать Comsol Multiphysics (он же FEMLab, сколько можно понять Pde Toolbox в MatLab'е был его прямым предшественником), мы же будем ниже использовать бесплатную программу FreeFem++, поддерживающую большое число ОС: Linux, Mac OS X, Microsoft Windows и Solaris.

¹COURANT R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. // Bull. Amer. Math. Soc. Volume 49, Number 1 (1943), 1-23

²Исторические замечания о МКЭ см. у ДЕКЛУ в его « Методе конечных элементов », М., 1976.

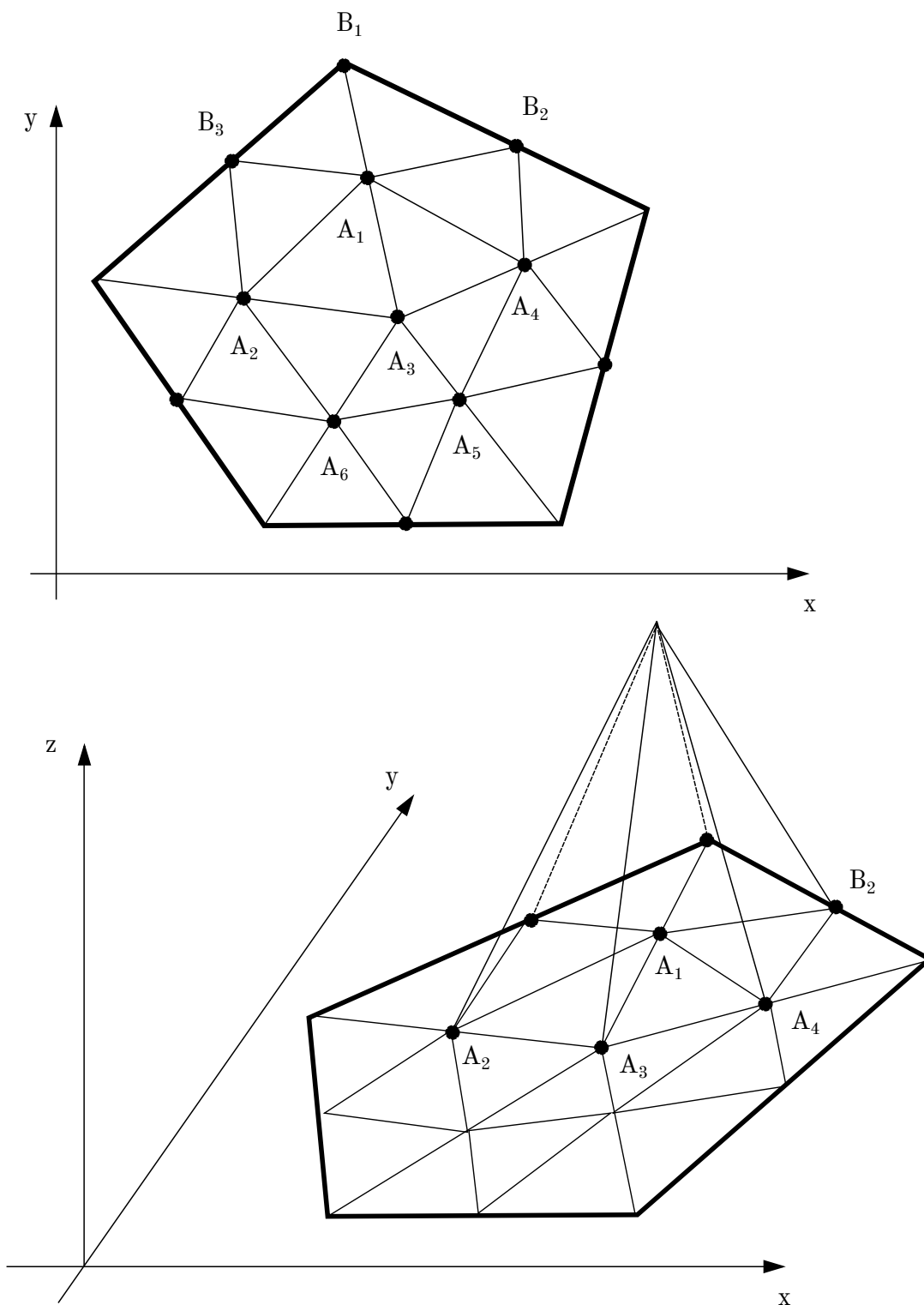


Рис. 3.1: Триангуляция пятиугольника и построение первой базисной функции.

3.1 Описание метода

Суть этого метода проще всего уяснить на примере первой краевой задачи для уравнения Пуассона в двумерной области:

$$\begin{cases} \Delta u = f, & ((x, y) \in \Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Будем считать, что эта задача допускает классическое решение, которое будем считать дважды непрерывно дифференцируемым в области Ω и на ее границе. Единственность такого решения очевидна: разность двух классических решений является решением однородной первой краевой задачи для уравнения Лапласа, и следовательно, равно нулю (см. 2.2).

Метод конечных элементов (МКЭ, FEM) состоит в следующем.

1. Триангуляция. Область Ω разделим на треугольники, стороны которых имеют длину порядка h , а углы по возможности близки к $\pi/3$. Вообще говоря, эта задача не труднее, чем подкладывание под область клетчатой бумаги. Эти треугольники называют конечными элементами, их вершины делят на внутренние, т.е. лежащие внутри области Ω , и граничные, то есть лежащие на границе этой области. Внутренние вершины перенумеруем в каком-либо порядке, образуя множество внутренних вершин, скажем $\{A_i\}_{i=1}^N$. Две точки этого множества будем называть соседними, если они являются вершинами одного треугольника. На рис. 3.1 показано одно из разбиений пятиугольника на треугольники, причем A_1, \dots, A_6 – внутренние узлы, а $A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3$ – узлы, соседствующие с узлом A_1 .

2. Построение системы базисных функций. С каждой внутренней вершиной A_i свяжем функцию φ_i , линейна во всех конечных элементах и $\varphi_i(A_j) = \delta_{ij}$. График этой функции представляет собой пирамиду высоты 1, основанием которой служит полигон с вершинами в точках, соседних с точкой A_i , а над самой точкой A_i размещается вершина пирамиды (см. рис. 3.1). В результате получится система базисных функций $\{\varphi_i\}$. Линейная

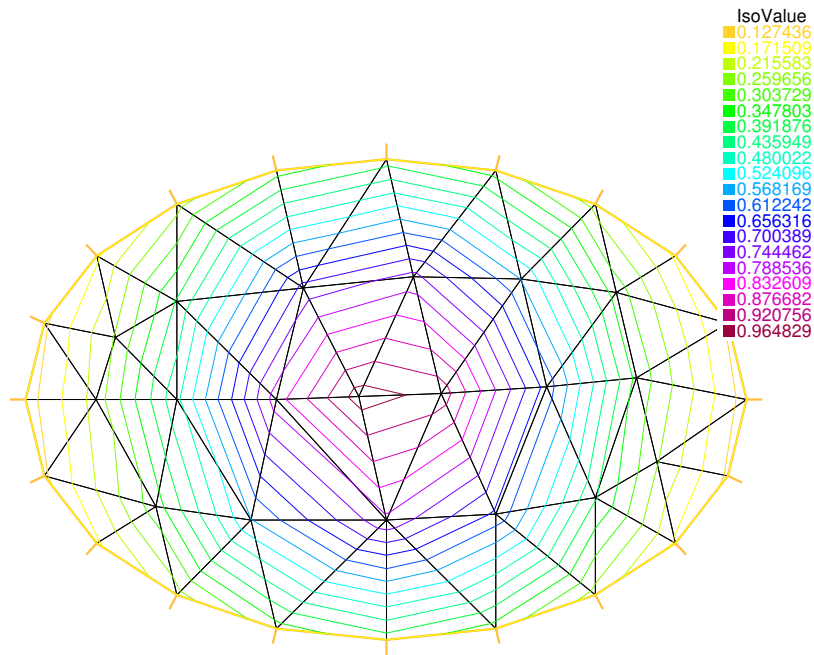
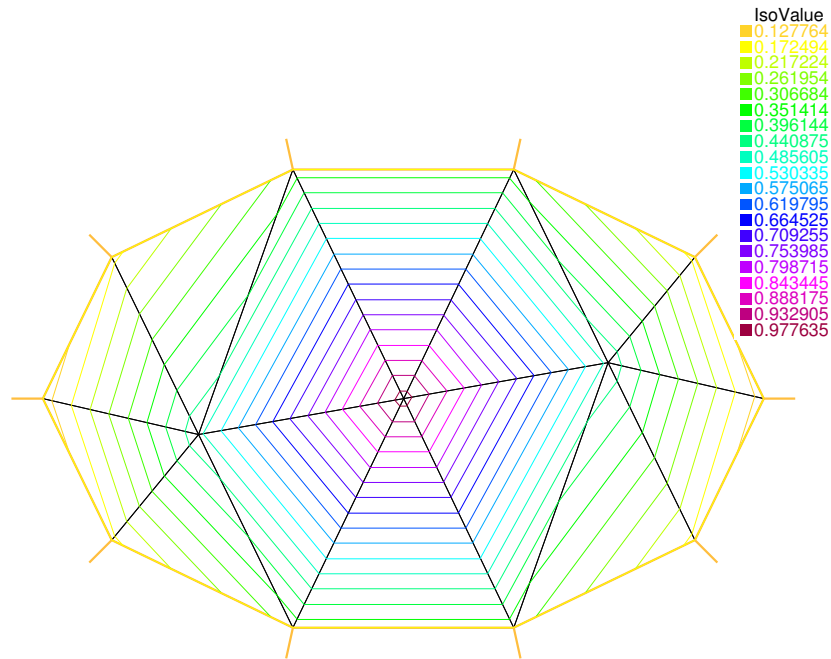


Рис. 3.2: Аппроксимация функции $e^{-x^2-y^2}$ в эллипсе $\frac{x^2}{1.5^2} + y^2 = 1$ при выборе 10 и 20 вершин на его границе. Хорошо видно, что линии уровня в каждом треугольнике – параллельные прямые, так и должно быть, поскольку в базисные функции являются линейными в каждом треугольнике.

комбинация этих функций

$$\sum_{i=1}^N g_i \varphi_i(x, y)$$

является кусочно-линейной функцией, причем коэффициенты этой комбинации имеют очень простой геометрический смысл: g_i – значение этой функции в вершине A_i . Поэтому для произвольной функции g разность

$$g(x, y) - \sum_{i=1}^N g(x_i, y_i) \varphi_i(x, y)$$

равна нулю во всех вершинах триангуляции. Коль скоро эти вершины расположены друг от друга на расстоянии h , можно ожидать, что, при надлежащих ограничениях на рост производной этой функции, эта функция всюду не больше h . Поэтому можно надеяться, что любую функцию g можно аппроксимировать линейной комбинацией базисных функций, то есть что с ошибкой порядка h верно

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^N g(x_i, y_i) \varphi_i(x, y).$$

Разумность этой гипотезы подтверждают многочисленные примеры, один из которых изображен на рис. 3.2.

Для построения этого рисунка в **FreeFem++** нужно создать и выполнить³ файл след. содержания.

Файл Pr-1.edp

```
border C(t=0,2*pi){x=1.5*cos(t); y=sin(t);} // Задание границы C области
mesh Th = buildmesh (C(10)); // Триангуляция с 10-ю точками на границе C
fespace Vh(Th,P1); // Построение конечномерного пространства
Vh gh=exp(-x^2-y^2); // Аппроксимация функции
plot(Th,gh,ps="Filename.eps",value=true,fill=false); // Построение графика
```

³Этот шаг зависит от ОС. В Ubuntu следует открыть терминал, перейти в директорию, в которой находится файл Pr-1.edp (напр., cd /home/user/fem) и затем выполнить команду **FreeFem++-nw Pr-1.edp**. Использование в пути к файлу русских букв может стать источником проблем.

Код программы интуитивно понятен. Отметим только, что при изменении в 3-ей строке параметра P1, скажем, на P2, вместо аппроксимации линейными функциями получится аппроксимация полиномами второго порядка.

3. Дискретизация уравнения Пуассона. Будем искать решение задачи (3.1) в виде линейной комбинации базисных функций:

$$u = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x, y);$$

число N при этом именуют числом свободных параметров. Мы не можем подставить это выражение в уравнение Пуассона $\Delta u = f$, поскольку базисные функции не имеют второй производной.⁴ Но, как следствие формулы Гаусса-Остроградского, тождество

$$\int_{\Omega} dx dy (\nabla u, \nabla v) + \int_{\Omega} dx dy f v = 0 \quad (3.2)$$

верно для любой функции v , лишь бы она была непрерывна в $\bar{\Omega}$, кусочно-дифференцируема функций в Ω и равна нулю на границе. Следовательно,

$$\int_{\Omega} dx dy (\nabla u, \nabla \varphi_j) + \int_{\Omega} dx dy f \varphi_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

Подставляя сюда

$$u = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x, y)$$

получаем систему из N алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов u_i , именно

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} dx dy (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) u_i + \int_{\Omega} dx dy f \varphi_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

⁴Вероятно, именно здесь самое тонкое место метода конечных элементов. Идея искать решение уравнения второго порядка в виде кусочно-линейной функции кажется очень странной, однако именно она доставляет простейший способ решения обыкновенных дифференциальных уравнений – метод ломанных, без которого бы не было и метода Рунге-Кутты.

или в более обозримой матричной форме

$$\mathfrak{A}\mathbf{u} + \mathbf{f} = 0,$$

где \mathfrak{A} – матрица $N \times N$ с элементами

$$a_{i,j} = \int_{\Omega} dx dy (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j),$$

\mathbf{f} – столбец длины N с элементами

$$f_i = \int_{\Omega} dx dy f \varphi_i,$$

а \mathbf{u} – столбец длины N , элементами которого служат искомые коэффициенты u_i . Таким образом, задача (3.1) сводится к системе алгебраических уравнений.

4. Решение $\mathfrak{A}\mathbf{u} + \mathbf{f} = 0$. Остается получившуюся систему линейных уравнений решить средствами линейной алгебры. Следует только иметь в виду, что на практике число свободных параметров N может иметь порядок сотни или даже тысячи, и поэтому важно обратить внимание на структуру матрицы \mathfrak{A} . Если i -ая вершина не соседствует с j -ой, то $a_{ij} = 0$, то есть в матрице \mathfrak{A} очень много нулей.⁵ Такие матрицы называются разреженными и последние лет 40 развития линейной алгебры были направлены на изобретение особых алгоритмов работы с такими матрицами. Поэтому современные пакеты для работы с матрицами, напр., MatLab, вычисляют \mathbf{u} за доли секунды.

Остается написать ответ или в виде суммы

$$u = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x, y),$$

или приняв u_i за найденные значения решения в вершинах $\{A_i\}$. Как отмечалось выше, часто интересно знать не саму функцию u , а ее максимум. Для его отыскания больше не надо ничего дифференцировать, просто

$$u_{\max} = \max_{i=1..N} u_i.$$

⁵Более точно, если каждая вершина соседствует не более чем с m другими вершинами, то среди N^2 элементов матрицы имеется лишь mN ненулевых элементов.

3.2 Примеры

3.2.1 Краевая задача в прямоугольнике

Начнем с нарочито простого примера. Пусть требуется решить задачу

$$\begin{cases} \Delta u + e^{-x^2-y^2} = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

в квадрате с вершинами в точках $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Разобьем его диагоналями на 4 треугольника (первая строка на рис. 3.2.1). У них будет одна внутренняя вершина – точка O , с ней мы должны связать одну базовую функцию φ_1 . Эта функция должна быть линейной в треугольнике $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$ (далее S):

$$\varphi_1 = a + bx + cy,$$

равной нулю в вершинах $(1, 0)$, $(0, 1)$ и единице в $(0, 0)$. Следовательно,

$$0 = a + b, \quad 0 = a + c, \quad 1 = a,$$

поэтому в треугольнике S

$$\varphi_1 = 1 - x - y.$$

Из соображения симметрии сразу можно написать выражение

$$\varphi_1 = 1 - |x| - |y|,$$

годное во всем квадрате. Решение мы должны искать в виде

$$u = u_1\varphi_1$$

записав для коэффициента u_1 одно уравнение, именно

$$a_{11}u_1 + f_1 = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_{\Omega} dx dy (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_1) = 4 \int_S dx dy (\nabla(1 - x - y), \nabla(1 - x - y)) = \\ &= 4|S|(1 + 1) = 8|S| = 4, \end{aligned}$$

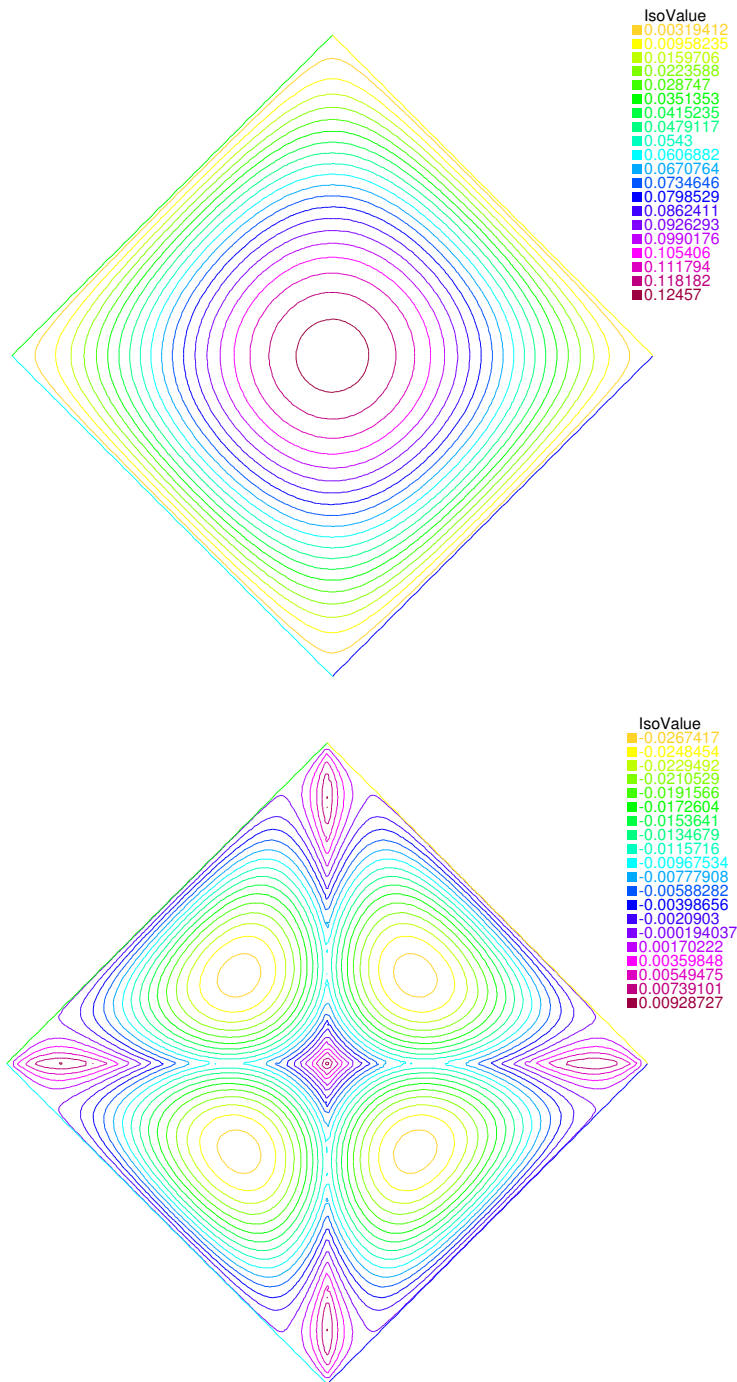


Рис. 3.3: Решение задачи (3.3) методом конечных элементов: сверху график решения при выборе по сто точек на каждой стороне квадрата, внизу – разность этого решения и $u = 0.138(1 - |x| - |y|)$.

а

$$f_i = \int_{\Omega} dx dy f \varphi_1 = -4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy e^{-x^2-y^2} (1-x-y) = 4 \times 0.138.$$

Поэтому

$$u = 0.138(1 - |x| - |y|).$$

Графиком этой функции является пирамида, то есть решение (3.3) имеет максимум в нуле с $u_{\max} = 0.138$, от него монотонно спадает до нуля на границах области. Замечательно, что это описание не претерпевает никакого изменения при увеличении числа треугольников. На рис. (3.2.1) представлен график приближенного решения, полученного при выборе по сотне точек на каждой стороне квадрата. Хорошо видно, что грани пирамиды, изображающей график решения, разгладились, но максимум и характер решения при этом существенно не изменились. Более того, ошибка лежит в пределах второй значащей цифры.

При разбиении на большее число треугольников вычисления лучше поручить одному из многочисленных пакетов, предназначенных для работы с конечными элементами. В частности, для построения рис. (3.2.1) использовалась след. программа на FreeFem++.

Файл Pr-2.edp

```
border C1(t=0,1){x=1-t; y=0+t;}
border C2(t=0,1){x=0-t; y=1-t;}
border C3(t=0,1){x=-1+t; y=0-t;}
border C4(t=0,1){x=0+t; y=-1+t;}
mesh Th = buildmesh (C1(100)+C2(100)+C3(100)+C4(100)); // Триангуляция
fespace Vh(Th,P1); // Построение конечномерного пространства
Vh u,v; // декларация кусочно-линейных функций u и v
func f = -exp(-x^2-y^2); // задание правой части уравнения Пуассона
solve Poisson(u,v,solver=LU) = // задание уравнение Пуассона
int2d(Th)(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)) // билинейная часть
+int2d(Th)( f*v) // правая часть
+ on(C1,C2,C3,C4,u=0) ; // условия Дирихле на C
plot(u,Th,ps="Poisson-3.eps",value=true,fill=false);
```


Специфической особенностью FreeFem++ является необходимость задавать уравнение в слабой форме (3.2) и особо указывать, что на границе решение равно нулю.⁶

3.2.2 Краевая задача в треугольнике

Пусть требуется решить задачу

$$\begin{cases} \Delta u + e^{-x^2-y^2} = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

в равностороннем треугольнике с вершинами в точках $(0.5, 0)$, $(-0.5, 0)$, $(0, \sqrt{3}/2)$.

Поделив стороны треугольника на три части, получим простейшую триангуляцию, годную для метода конечных элементов (см. первую строку на рис. 3.4). При этом получается 1 базовая функция, отвечающая одному внутреннему узлу – центру треугольника.

Дом. задание. Получите первую строку рис. 3.4 без привлечения компьютера.

3.3 Обоснование метода конечных элементов

Убедившись на простых примерах, что метод конечных элементов позволяет конструктивно находить приближенные решения задачи (3.1), обратимся к его обоснованию, ограничившись в итоге случаем случаям, когда рассматриваемая область Ω – выпуклый многоугольник⁷. С классической

⁶Последнее приходится указывать особо, поскольку на самом деле FreeFem++ решает не первую краевую задачу, а задачу с краевыми условиями третьего рода

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0$$

при очень большом h ; эта величина называется *tg* (*très grande valeur*), по умолчанию равна 10^30 , но при желании может быть переопределена. См. F. НЕСНТ. FreeFem++. Third Edition, Version 3.19, стр. 16.

⁷Из курса анализа хорошо известно, что любую область можно исчерпывать многоугольниками, однако устойчивость решения задачи (3.1) по отношению к малым деформациям области требует обоснования, от которого мы хотя ли бы уклониться.

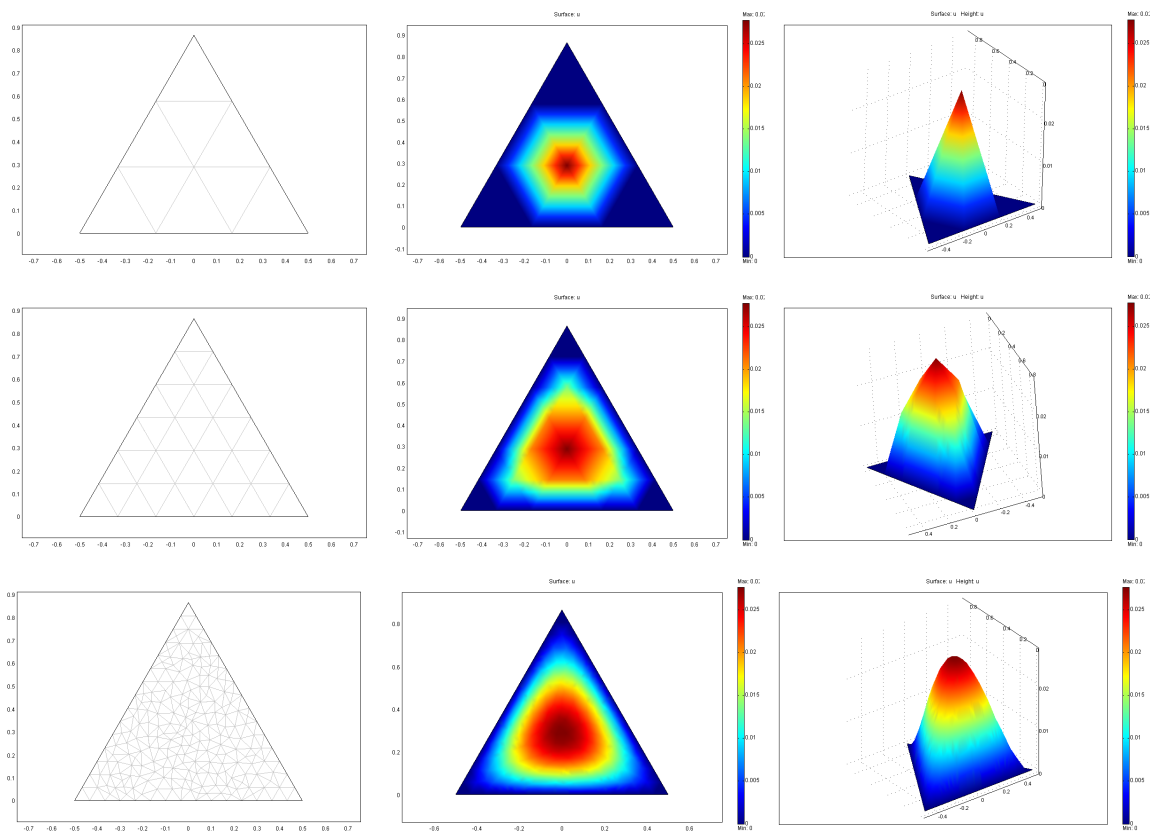


Рис. 3.4: Решение задачи (3.4) методом конечных элементов. В первом столбце показаны три подразделения области на треугольники, во втором – карты соответствующих им приближенных решений, в третьем – графики этих решений. Графики получены в коммерческом пакете FEMLab 3.1, см. www.comsol.com.

точки зрения, нам следовало бы доказать, что функция

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x, y),$$

коэффициенты которой подобраны так, что

$$\int_{\Omega} dx dy (\nabla u, \nabla \varphi_j) + \int_{\Omega} dx dy f \varphi_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

близка к точному решению u , скажем, в том смысле, что неравенство верно

$$|u_h - u| \leq Ch$$

во всех точках области Ω при надлежащим образом выбранной константе C . Тогда, увеличивая число треугольников (и следовательно, уменьшая h) мы могли бы приблизить решение с любой точностью. Еще хотелось бы еще уметь находить эту константу C по заданной области и правой части f .

К сожалению, обоснование метода конечных элементов даже для простейшего случая задачи (3.1) представляет значительные трудности, которые были преодолены лишь в середине 1960-х годов. При этом получается доказать не совсем то, что следовало бы с классической точки зрения. Идея этого метода состоит в сведении оценки точности метода конечных элементов к оценке точности аппроксимации заданной функции линейной комбинацией базисных функций.

3.3.1 Сведение оценки ошибки метода конечных элементов к оценке ошибки аппроксимации

Обозначим как \mathfrak{H} множество всех непрерывных функций, обращающихся в нуль на границе области Ω и имеющих тот же тип гладкости, что и кусочно линейные функции⁸. Классическое решение задачи (3.1), если оно вообще

⁸т.е. их градиент в области имеет скачки разве лишь на некоторой кривой, что не препятствует их интегрированию по Ω .

существует⁹, удовлетворяет задаче

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathfrak{H}, \quad (3.5)$$

где

$$a(u, v) = \int_{\Omega} dx dy (\nabla u, \nabla v), \quad l(v) = - \int_{\Omega} dx dy f v.$$

Приближенное решение u_h ищется среди множества \mathfrak{H}_h функций вида

$$v = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i(x, y)$$

как решение из \mathfrak{H}_h системы уравнений

$$a(u_h, \varphi_i) = l(\varphi_i) \quad i = 1, \dots, N,$$

которую можно записать как

$$a(u_h, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathfrak{H}_h. \quad (3.6)$$

С точки зрения линейной алгебры \mathfrak{H} – линейное пространство над полем \mathbb{R} , l – линейный форма, a – билинейная форма в этом пространстве. Очевидно, что a является положительно определенной и поэтому ее можно принять за скалярное произведение в этом пространстве. Наконец, \mathfrak{H}_h – линейное подпространство \mathfrak{H} . Докажем, что

$$a(u - u_h) \leq a(u - v) \quad \forall v \in \mathfrak{H}_h. \quad (3.7)$$

Пусть v – какая угодно функция из \mathfrak{H}_h , тогда $w = u_h - v$ тоже принадлежит \mathfrak{H}_h и

$$a(u - v) - a(u - u_h) = a(u - u_h + w) - a(u - u_h) = 2a(u - u_h, w) + a(w).$$

⁹Если это соотношение (3.5) выполняется при всех v для некоторой дважды непрерывно дифференцируемой функции u , обращающейся в нуль на границе области, то эта функция u – решение (3.1). Поэтому соотношение (3.5) называют слабой постановкой задачи (3.1), а функцию $u \in \mathfrak{H}$, удовлетворяющую (3.5), но не имеющую непрерывные вторые производные – обобщенным или слабым решением (3.1). Методами функционального анализа совсем не трудно доказать, что слабое решение всегда существует, если расширить \mathfrak{H} до гильбертова пространства с нормой a .

Поскольку u – решение (3.5), верно $a(u, w) = l(w)$, а поскольку u_h – решение (3.6), верно $a(u_h, w) = l(w)$. Поэтому

$$a(u - v) - a(u - u_h) = a(w) \geq 0,$$

что и тр. д.

Выше, при описании метода, на 2-м шаге была высказана гипотеза, обоснованию которой будет посвящен следующий раздел: любую функцию u , в т. ч. и решение (3.1), можно аппроксимировать линейной комбинацией базисных функций, а именно

$$P_h u = \sum u(x_i, y_i) \varphi_i.$$

Подставив ее в (3.7) на место v , сведем оценку разности $u - u_h$ к оценке разности $u - P_h u$ (ошибки аппроксимации):

Лемма 1. Пусть u – решение задачи (3.1), u_h – приближенное решение той же задачи, найденное методом конечных элементов, а

$$P_h u = \sum u(x_i, y_i) \varphi_i$$

– линейная комбинация базисных функций метода конечных элементов, принимающая в вершинах сетки те же значения, что и точное решение, тогда справедливо неравенство:

$$\int_{\Omega} dx dy |\nabla(u - u_h)|^2 \leq \int_{\Omega} dx dy |\nabla(u - P_h u)|^2.$$

Замечание. – Это утверждение для произвольных эллиптических операторов, равно как и предшествующее ему неравенство для произвольных билинейных форм было впервые установлено Жаном Сеа (Jean Cea) в 1964 г.¹⁰, и поэтому часто называется леммой Сеа (Cea's Lemma).

¹⁰JEAN CEA. Approximation variationnelle des problèmes aux limites. // Annales de l'institut Fourier, tome 14, no 2 (1964), p. 345-444.

3.3.2 Ошибка аппроксимации

Сравнить u и $P_h u$ много проще, чем u и u_h , поскольку это можно сделать в каждом треугольнике, на которые была разбита область Ω , по отдельности. Итак, пусть ABC – один такой треугольник, в нем $P_h u$ – линейная функция, то есть

$$P_h u = ax + by + c,$$

коэффициенты которой удовлетворяют трем условиям

$$P_h u|_A = u(A), \quad P_h u|_B = u(B), \quad P_h u|_C = u(C)$$

Весьма точная оценка уклонения u от ее линейной аппроксимации была получена Наттерером.

Лемма 2. (Франк Наттерер, 1975¹¹) Пусть ABC – треугольник со сторонами a , b , линейный размер которого будем характеризовать величиной

$$h = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Тогда для любой дважды непрерывно дифференцируемой в треугольнике функции u справедлива оценка

$$\int_{\Delta ABC} dx dy |\nabla(u - P_h u)|^2 \leq h^2 c^2 \int_{\Delta ABC} dx dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Здесь константа c зависит от пропорций треугольника:

$$c = \bar{c} \frac{1 + \sqrt{1 - d^2}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - d^2}}},$$

где безразмерная величина

$$d = \frac{|\Delta ABC|}{a^2 + b^2}$$

меняется в пределах от 0 до 1, а константа \bar{c} может быть взята в пределах

$$0.46 \leq \bar{c} \leq 0.81.$$

¹¹NATTERER F. Berechenbare Fehlerschranken für die Methode der Finiten Elemente. International Series of Numerical Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel. 1975. V. 28. Pp. 109–121.

Применим это утверждение к каждому из треугольников, на которые была разбита область Ω , предположив, что они имеют схожие размеры и пропорции (в общем случае нужно взять в качестве h и c наибольшие среди всех треугольников). Складывая полученные таким путем неравенства, имеем

$$\int_{\Omega} dx dy |\nabla(u - P_h u)|^2 \leq h^2 c^2 \int_{\Omega} dx dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Напр., разбиения для задачи (3.3) в квадрате на 4-ре равных треугольника имеем: две стороны равны $a = b = 1$, поэтому и $h = 1$; площадь треугольника равна $|\Delta ABC| = \frac{1}{2}$, поэтому

$$d = \frac{2|\Delta ABC|}{h^2} = 1$$

и

$$c = \bar{c} \frac{1 + \sqrt{1 - d^2}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - d^2}}} = \bar{c}.$$

В итоге

$$\int_{\Omega} dx dy |\nabla(u - P_h u)|^2 \leq \bar{c}^2 \int_{\Omega} dx dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

3.3.3 Неравенство Каччиополи-Ладыженской

Остается избавиться от u в правой части неравенства.

Лемма 3. (Неравенство Каччиополи-Ладыженской, 1951¹²) Для классического решения u задачи (3.1) в выпуклой области Ω с кусочно-гладкой границей справедливо след. неравенство:

$$\int_{\Omega} dx dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \leq \int_{\Omega} dx dy f. \quad (3.8)$$

¹²ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А. Краевые задачи математической физики. Гл. 2, §6.

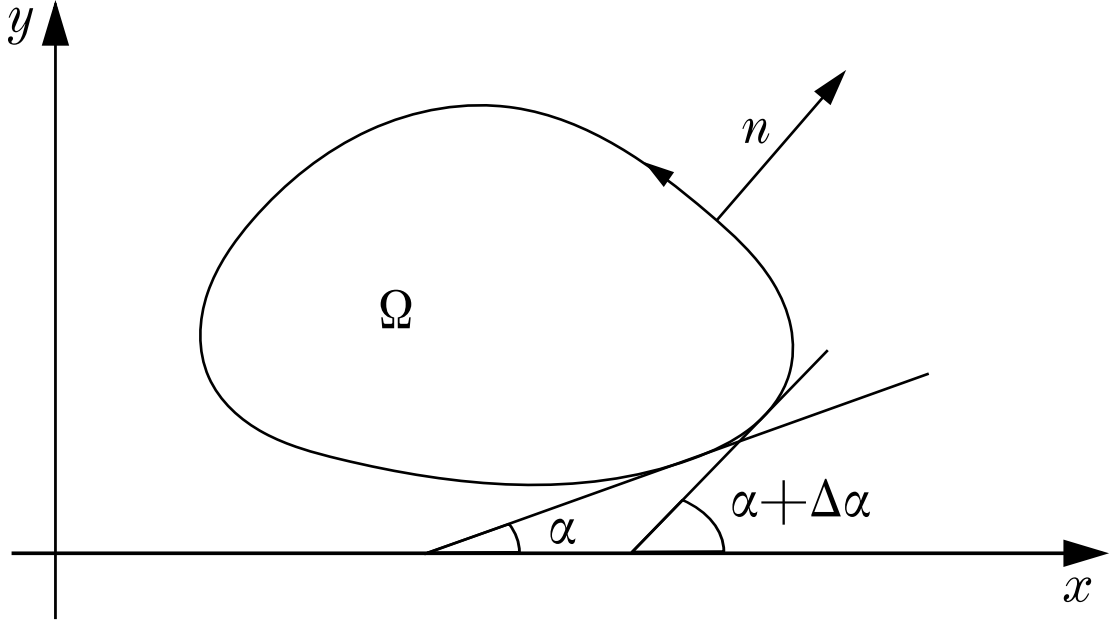


Рис. 3.5: К выводу неравенства Каччиополи-Ладыженской

Доказательство. Заметив, что

$$f^2 = (\Delta u)^2 = u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2u_{xx}u_{yy},$$

преобразуем интеграл от последнего слагаемого по формуле Гаусса-Остроградского:

$$\begin{aligned} 2 \iint_{\Omega} dx dy u_{xx} u_{yy} &= 2 \iint_{\Omega} dx dy \frac{\partial u_x}{\partial x} u_{yy} \\ &= 2 \oint_{\partial \Omega} d\sigma n_x u_x u_{yy} - 2 \iint_{\Omega} dx dy u_x \frac{\partial u_{yy}}{\partial x} \\ &= 2 \oint_{\partial \Omega} d\sigma n_x u_x u_{yy} - 2 \iint_{\Omega} dx dy u_x \frac{\partial u_{xy}}{\partial y} \\ &= 2 \oint_{\partial \Omega} d\sigma (n_x u_x u_{yy} - n_y u_x u_{xy}) + 2 \iint_{\Omega} dx dy \frac{\partial u_x}{\partial y} u_{xy} \\ &= 2 \oint_{\partial \Omega} d\sigma u_x (n_x u_{yy} - n_y u_{xy}) + 2 \iint_{\Omega} dx dy \frac{\partial u_x}{\partial y} u_{xy} \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} dx dy \left[f - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = \\ & = 2 \oint_{\partial \Omega} d\sigma u_x \left(n_y \frac{\partial}{\partial x} - n_x \frac{\partial}{\partial y} \right) u_y \end{aligned}$$

и для доказательства теоремы нужно лишь установить положительную определенность интеграла по границе.

Пусть граница $\partial \Omega$ описывается параметрически как

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t = 0..1,$$

и с возрастанием t пробегается против часовой стрелки, тогда единичная внешняя нормаль дается как

$$\vec{n} = \frac{(-\dot{y}, \dot{x})^T}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

и поэтому

$$2 \oint_{\partial \Omega} d\sigma u_x \left(n_y \frac{\partial}{\partial x} - n_x \frac{\partial}{\partial y} \right) u_y = 2 \int_0^1 dt u_x \left(\dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} \right) u_y = 2 \int_0^1 dt u_x \frac{du_y}{dt}.$$

На границе u обращается в нуль, поэтому $u(x(t), y(t))$ равно нулю при всех t ; значит, ее производная по t тоже равна нулю:

$$u_x \dot{x} + u_y \dot{y} = 0.$$

Это позволяет выразить u_x через u_y :

$$u_x = -\frac{\dot{y}}{\dot{x}} u_y.$$

Поэтому

$$2 \int_0^1 dt u_x \frac{du_y}{dt} = -2 \int_0^1 dt \frac{\dot{y}}{\dot{x}} u_y \frac{du_y}{dt} = - \int_0^1 dt \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \frac{du_y^2}{dt} = \int_0^1 dt u_y^2 \left(\frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right).$$

Величина $\frac{\dot{y}}{x}$ представляет собой тангенс угла, образованного касательной к границе и оси Ox . Когда граница выпуклой области пробегается против часовой стрелки, эта величина все время возрастает, претерпев разрыв в той точке, где касательная параллельна оси Ox (см. рис. 3.5). Поэтому

$$2 \oint_{\partial\Omega} d\sigma u_x \left(n_y \frac{\partial}{\partial x} - n_x \frac{\partial}{\partial y} \right) u_y = \int_0^1 dt u_y^2 \left(\frac{d \dot{y}}{dt \dot{x}} \right).$$

Если граница состоит из нескольких гладких кусков, то интеграл по границе придется представить в виде суммы по каждому из кусков, что не изменит знака интеграла. \square

3.3.4 Итоговая теорема

Собрав вместе утверждения лемм 1, 2 и 3, имеем:

Теорема 7. Если задача (3.1) в выпуклом многограннике Ω допускает классическое решение u , а u_h – приближенное решение той же задачи, найденное методом конечных элементов, то справедлива оценка

$$\int_{\Omega} dx dy |\nabla(u - u_h)|^2 \leq h^2 c^2 \int_{\Omega} dx dy f^2.$$

Здесь h – максимальная из длин сторон треугольников разбиения, а константа c зависит от пропорций треугольников.

Отсюда видно, что при увеличении числа треугольников ($h \rightarrow 0$) с сохранением их пропорций (c не меняется) величину

$$\int_{\Omega} dx dy |\nabla(u - u_h)|^2$$

можно сделать сколь угодно малой. На практике вместо среднего по области уклонения градиента решения, удобно использовать уклонение самого решения:

Теорема 8. Если задача (3.1) в выпуклом многограннике Ω допускает классическое решение u , а u_h – приближенное решение той же задачи, найденное методом конечных элементов, то справедлива оценка

$$\int_{\Omega} (u - u_h)^2 dx dy \leq h^4 c^4 \int_{\Omega} f^2 dx dy.$$

Здесь h – максимальная из длин сторон треугольников разбиения, а константа c зависит от пропорций треугольников.

Доказательство. Примем без доказательства, что задача

$$\{\Delta\psi = u_h - u, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0$$

имеет решение. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u - u_h)^2 dx dy &= - \int_{\Omega} (u - u_h) \Delta\psi dx dy = \\ &= \int_{\Omega} (\nabla(u - u_h), \nabla\psi) dx dy \\ &= \int_{\Omega} (\nabla(u - u_h), \nabla(\psi - P_h\psi)) dx dy \\ &\leq \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla(u - u_h)|^2 dx dy} \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla(\psi - P_h\psi)|^2 dx dy} \end{aligned}$$

Согласно теореме 7

$$\int_{\Omega} dx dy |\nabla(u - u_h)|^2 \leq h^2 c^2 \int_{\Omega} dx dy f^2,$$

а согласно неравенству Наттерера (лемма 2)

$$\int_{\Omega} |\nabla(\psi - P_h\psi)|^2 dx dy \leq h^2 c^2 \int_{\Omega} (\psi_{xx}^2 + 2\psi_{xy}^2 + \psi_{yy}^2) dx dy,$$

наконец, согласно неравенству Каччиополи-Ладыженской

$$\int_{\Omega} (\psi_{xx}^2 + 2\psi_{xy}^2 + \psi_{yy}^2) dx dy \leq \int_{\Omega} (u - u_h)^2 dx dy;$$

поэтому

$$\int_{\Omega} (u - u_h)^2 dx dy \leq h^2 c^2 \sqrt{\int_{\Omega} f^2 dx dy} \sqrt{\int_{\Omega} (u - u_h)^2 dx dy},$$

откуда

$$\int_{\Omega} (u - u_h)^2 dx dy \leq h^4 c^4 \int_{\Omega} f^2 dx dy.$$

□

Теорема 8 не дает оценки для разности $u - u_h$ в каждой точке области, но лишь усредненную по области оценку этой величины, именно

$$\int_{\Omega} dx dy |u - u_h|^2 \leq h^4 c^4 \int_{\Omega} dx dy f^2.$$

При этом, вообще говоря, в отдельных точках области расхождения между точным и приближенным решением могут быть весьма значительны и это всегда следует помнить, глядя на графики решений, выдаваемые FEMLab'ом.¹³ Однако для практических нужд это и не важно. Напр., если задача (3.1) описывает стационарное распределение температуры, то термометром можно измерить температуру не в одной точке, но в некоторой ее окрестности. Поэтому наблюдаемой величиной является не сама u , а ее усреднение, скажем,

$$\hat{u}(x, y) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 \leq r^2} u(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Но тогда в силу неравенства Коши-Буняковского

$$\begin{aligned} |\hat{u}(x, y) - \hat{u}_h(x, y)| &\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 \leq r^2} |u(\xi, \eta) - u_h(\xi, \eta)| d\xi d\eta \\ &\leq \frac{1}{\pi r^2} \sqrt{\pi r^2} \sqrt{\int_{\Omega} d\xi d\eta |u - u_h|^2} \leq \frac{c^2}{\sqrt{\pi r}} h^2, \end{aligned}$$

то есть во всей области Ω усредненное приближенное решение \hat{u}_h равномерно по x, y сходится к усредненному точному \hat{u} при $h \rightarrow 0$.

¹³На самом деле, после значительных усилий оценки для $|u - u_h|$ все же можно получить, см. также лемму Вейля.

Глава 4

Собственные колебания мембраны

4.1 Поперечные колебания мембраны и задача на собственные значения

Мембраной или перепонкой называется пленка, натянутая на плоский контур, которая, подобно струне, не сопротивляется изгибу и сдвигу. Если ввести в плоскости этого контура оси Ox и Oy декартовой системы координат, то при малых поперечных колебаниях точка мембраны, имевшая в положении равновесия координаты $(x, y, 0)$, будет иметь координаты (x, y, u) , причем u можно считать однозначной функцией x, y и времени t . Эта функция удовлетворяет уравнению колебаний мембраны:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \Delta u, \quad (x, y) \in \Omega, t > 0$$

где ρ – плотность, а T – натяжение мембраны. Это уравнение отличается от уравнения колебаний струны только тем, что вторая производная по x , заменена здесь лапласианом.

Замечание. – Наиболее простой вывод этого уравнения основан на принципе Гамильтона¹; в рамках этого подхода данное выше определение мембраны и закон Гука заменяют предположением о том, что потенциальная энергия мембраны пропорциональна

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy = \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy.$$

¹См., напр., ГИЛЬБЕРТ-КУРАНТ. Уравнения математической физики, т. I, гл. IV, §10, п. 3.

Величина эта не зависит от выбора декартовой системы координат и в некотором смысле характеризует степень изогнутости мгновенного профиля. Элементарный вывод этого уравнения, повторяющий вывод уравнения малых колебаний струны, приведен в [ТС]. Наконец, это уравнение можно вывести из общих уравнений колебания упругих тел².

Под собственными колебаниями мембраны понимают такое ее движение, когда u зависит от времени след. образом:

$$u = u(x, y) \sin(\omega t + \theta). \quad (4.1)$$

Опытным путем можно наблюдать, что собственные колебания возникают не при всех частотах, но лишь при дискретном их наборе. Однако, если в случае струны эти частоты образуют гармонический ряд

$$\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots,$$

то теперь это распределение может оказаться весьма затейливым. В музыкальной акустике термин гармоника употребляют только по отношению к собственным колебаниям, частоты которых образуют гармонический ряд, коль скоро он лежит в основе всякой музыкальной гармонии, однако теперь часто этот термин употребляют как синоним собственных функций. Еще одна легко наблюдаемая характеристика собственных колебаний мембран – узловые линии. Именно, если посыпать мембрану песком, то он или вовсе скатится с мембраны, или выстроится вдоль линии, точки которых неподвижны, то есть вдоль линии $u(x, y) = 0$, которую называют узловой линией функции u . В результате возникают т.н. звуковые фигуры, которые легко наблюдать на опыте; впервые они были описаны Хладни (Ernst Chladni).³

Подставив выражение (4.1) в уравнение движения и вспомнив, что границы мембраны закреплены, мы получим задачу на собственные значения:

²ФРАНК-МИЗЕС. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Гл. IX, §3, п. 1

³Хладни наблюдал такие фигуры не на перепонках, а на металлических пластинах с закрепленным центром. Детально образование фигур Хладни можно увидеть в прекрасном фильме «Chladni Plates», снятом Harvard Natural Sciences Lecture Demonstrations, июль 2011.

найти такие значения параметра λ , при которых задача

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

имеет нетривиальное решение u ; как и в теории матриц такие λ называют собственными значениями задачи (4.2), соответствующие им решения – собственными функциями. При этом каждому собственному значению λ отвечает собственное колебание мембраны с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{T\lambda}{\rho}} \quad (4.3)$$

и мгновенным профилем

$$u = u(x, y) \sin(\omega t + \theta),$$

где u – собственная функция, отвечающая собственному значению λ , а θ – фаза, которая может быть взята произвольным образом.

4.2 Свойства собственных функций и собственных значений

1. Собственные значения равных областей равны, при увеличении линейного размера в k раз, собственное значение уменьшается в k^2 раз, то есть является величиной размерности l^{-2} .

2. Все собственные значения задачи (4.2) – положительны, поэтому в частности в (4.3) корень не может дать комплексных значений. Для доказательства, умножим (4.2) на u и интегрируем по Ω :

$$\int_{\Omega} u \Delta u dx dy = -\lambda \int_{\Omega} u^2 dx dy,$$

но в силу теоремы Гаусса-Остроградского

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \Delta u dx dy &= \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\nabla u) dx dy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla u) dx dy = \\ &= - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla u) dx dy, \end{aligned}$$

поэтому последнее равенство можно переписать в виде

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} (\nabla u, \nabla u) dx dy}{\int_{\Omega} u^2 dx dy}.$$

Это выражение неотрицательно и может быть равно нулю, только если $\nabla u = 0$ во всей Ω . Последнее же в союзе с граничными условиям $u = 0$ на $\partial\Omega$ дает $u = 0$ всюду, хотя собственная функция по определению не может быть всюду равна нулю.

3. Двум различным собственным значениям, скажем λ и μ , отвечают собственные функции u и v , которые ортогональны в том смысле, что

$$\int_{\Omega} uv dx dy = 0.$$

В самом деле, умножая (4.2) на v и интегрируя по Ω , получим

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx dy = \lambda \int_{\Omega} uv dx dy;$$

но в силу теоремы Гаусса-Остроградского

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \Delta u dx dy &= \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\nabla u) dx dy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla u) dx dy = \\ &= \int_{\Omega} u \Delta v dx dy = -\mu \int_{\Omega} uv dx dy, \end{aligned}$$

поэтому последнее равенство дает, что

$$(\lambda - \mu) \int_{\Omega} uv dx dy = 0.$$

4. Одному собственному значению отвечает конечное число линейно независимых собственных функций, это число называют *кратностью собственного значения*. Все собственные значения с учетом кратности можно перенумеровать в порядке возрастания и составить всегда бесконечный ряд

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots,$$

причем

$$\lambda_n \approx \frac{4\pi}{|\Omega|} n \quad (n \rightarrow +\infty). \quad (4.4)$$

5. Если сопоставить каждому собственному значению ряда

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots,$$

по одной собственной функции, условившись брать для повторяющихся собственных значений ортогональные собственные функции, получится система собственных функций

$$u_1, u_2, u_3, \dots,$$

элементы которого ортогональны друг другу в силу второго свойства:

$$\int_{\Omega} u_m u_n dx dy = 0 \quad (n \neq m).$$

Эта система полна в том смысле, что любую функцию f , определенную в области Ω , можно разложить в ряд вида

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(x, y),$$

где

$$f_n = \frac{\int_{\Omega} f u_n dx dy}{\int_{\Omega} u_n^2 dx dy}.$$

Это утверждение, очевидно, является обобщением теоремы В.А. Стеклова. Выписанный ряд для кусочно-непрерывных функций сходится в том смысле, что

$$\int_{\Omega} \left| f - \sum_{n=1}^N f_n u_n(x, y) \right| dx dy \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

В этом случае говорят о сходимости в среднем (ср. стр. 99).

Последние два свойства весьма схожи со свойствами собственных значений и собственных векторов самосопряженных матриц и могут быть доказаны в самом общем виде для бесконечных матриц.⁴ Классическое доказательство, основанное на методе интегральных уравнений, можно найти в [1], гл. VIII, §1.

Дом. задание. Справедливы ли свойства 1-3 для задачи

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} ?$$

4.3 Вычисление собственных значений методом конечных элементов

Для приближенного решения задачи (4.2) можно воспользоваться МКЭ. Итак, пусть область Ω разбита на треугольники и с каждой внутренней вершиной связана кусочно линейная функция $\varphi_i(x, y)$. Приближенное решение будем искать в виде

$$u_h(x, y) = \sum u_i \varphi_i(x, y).$$

Не имея возможности подставить это выражение в (4.2) прямо, запишем это последнее в «слабой форме» как тождество

$$\int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx dy = \lambda \int_{\Omega} u v dx dy,$$

верное для любой функции v , обращающейся в нуль на границе Ω , и примем, что u_h удовлетворяет ему не при всех v , но хотя бы при $v = \varphi_i$

$$\int_{\Omega} (\nabla u_h, \nabla \varphi_i) dx dy = \lambda \int_{\Omega} u_h \varphi_i dx dy \quad (i = 1, \dots, N).$$

Отсюда для отыскания столбца коэффициентов $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ получим матричную задачу на собственные значения

$$\mathfrak{A}\mathbf{u} = \lambda \mathfrak{B}\mathbf{u},$$

⁴См. теорему о спектральном разложении для вполне непрерывных операторов, напр., в Лекциях по функциональному анализу Ф. Рисса и Б. Секефальви-Надя, гл. VI; о ее применении к рассматриваемой задаче на собственные значения см. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А. Гл. II, §4.

где \mathfrak{A} уже знакомая нам разреженная симметрическая матрица, элементами которой служат интегралы

$$a_{ij} = \int_{\Omega} (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) dx dy,$$

а \mathfrak{B} – тоже симметрическая разреженная матрица, элементами которой служат

$$b_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx dy.$$

Поскольку матрицы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} – симметрические и положительно определенные, то, как известно из курса линейной алгебры, задача на собственные значения

$$\mathfrak{A}u = \lambda \mathfrak{B}u$$

имеет ровно N собственных значений (с учетом кратности) $\{\lambda_i^h\}$, которые все положительны. При небольшом числе треугольников в разбиении эти числа можно найти как корни характеристического уравнения

$$\det |\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{B}| = 0;$$

при больших N , однако, даже вычисление определителей представляет определенные трудности, которые успешно обходят, используя разреженность матриц.

Собственным значениям отвечают N собственных векторов $\{\mathbf{u}^{(i)}\}$, образующих базис, то есть любой столбец длины N можно представить как линейную комбинацию этих столбцов. Это означает, что любую функцию

$$v_h = \sum_{j=1}^N v_j \varphi_j(x, y)$$

можно представить как линейную комбинацию функций

$$u_h^{(i)} = \sum_{j=1}^N u_j^{(i)} \varphi_j(x, y),$$

то есть приближенные собственные функции $u_h^{(i)}$ образуют базис пространства \mathfrak{H}_h . Теперь не трудно видеть, что свойства 4-5 получаются из соответствующих теорем линейной алгебры путем предельного перехода $h \rightarrow 0$.

Дом. задание. Докажите, что приближенные собственные функции $u_h^{(i)}$ ортогональны в смысле свойства 5 пред. параграфа.

4.4 Первое собственное значение

Как и в случае струны, высоту звука, возникающего при ударе по мембране, определяет наименьшая из собственных частот, при которой все точки мембраны приходят в движение. Иными словами, *первое собственное значение λ_1 всегда однократно и ему отвечает собственная функция u_1 , не имеющая узловых линий, а все прочие собственные функции их обязательно имеют.* Это утверждение было строго доказано Р. Курантом в 1930-х на основе разработанного им принципа минимакса⁵, уклонившись от его изложения, найдем первые собственные значения простых областей и опишем соответствующие им собственные функции.

4.4.1 Первое собственное значение круга

Начнем со случая, когда Ω – круг радиуса a . МКЭ в союзе со свойством 1 сразу дают, что

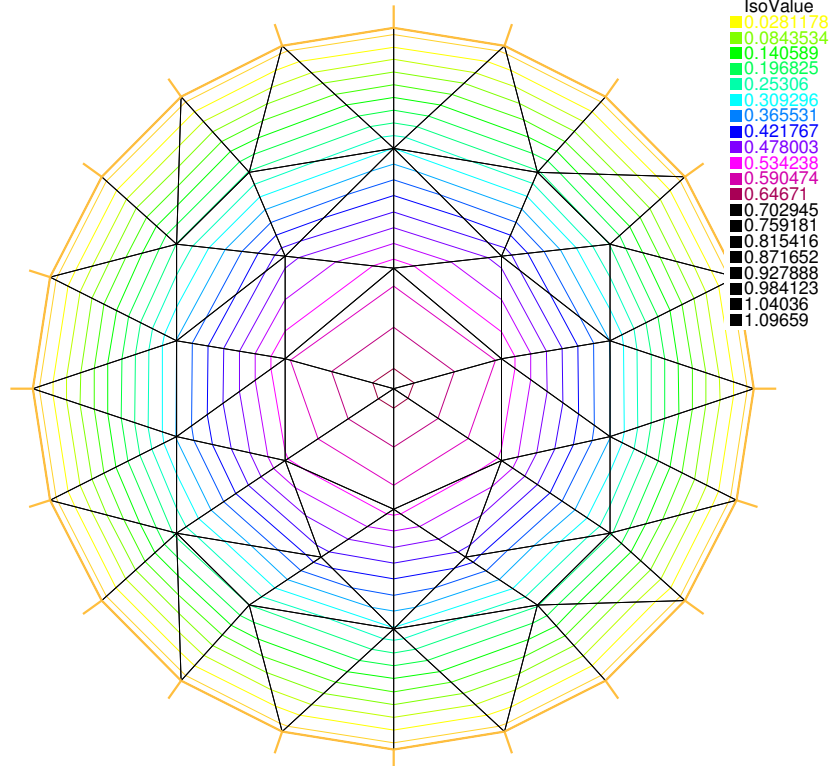
$$\lambda_1 = \frac{5.78\dots}{a^2},$$

а график u_1 имеет вид колокола (см. рис. 4.5). Оба эти утверждения можно получить аналитически след. образом.

Перейдем в полярную систему координат с центром в центре круга. Поскольку поворот на любой угол переводит круг сам в себя, вместе с $u_1(r, \varphi)$ собственной функцией будет и $u_1(r, \varphi + \text{const})$. Но собственная функция, отвечающая первому собственному значению, всегда однократна, поэтому

⁵ГИЛЬБРЕТ-КУРАНТ. Т. I, гл. VI, §6.

Eigenvalue =6.0173



Eigenvalue =5.78552



Рис. 4.1: Первая собственная функция единичного круга, вычисленная МКЭ. На верхнем рисунке взято 20 вершин на границе, на нижнем 200. Получающиеся значения для λ_1 можно сравнить с точным $\lambda_1 = 5.7831 \dots$

$u_1(r, \varphi + c_1) = c_2 u_1(r, \varphi)$. Норма

$$\int_{\Omega} u_1^2 dx dy$$

не меняется при поворотах, поэтому $c_2 = 1$, а значит

$$u_1(r, \varphi + c_1) = u_1(r, \varphi)$$

и поэтому *первая собственная функция круга не зависит от φ* .

Подставляя $u = u(r)$ в (4.2) и переходя в полярные координаты, получим

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) + \lambda u = 0 \\ |u|_{r=0} < \infty, \quad u|_{r=a} = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Если бы можно было указать два частных решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0,$$

названного в честь Бесселя *уравнением Бесселя нулевого порядка*, скажем y_1 и y_2 , то

$$u = C_1 y_1(\sqrt{\lambda} r) + C_2 y_2(\sqrt{\lambda} r),$$

тогда константы C_1 и C_2 можно было бы как в случае струны определить двух граничных условий, а λ из условия разрешимости системы уравнений для C_1 и C_2 .

В XVIII - нач. XIX веков предпринимались многочисленные попытки решить уравнение Бесселя в элементарных функциях, пока в середине 1830-х годов Лиувилль не доказал невозможность такого представления.⁶ Впрочем, подметив некоторое сходство этого уравнения с уравнением Эйлера

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{b}{x^2} y = 0,$$

частные решения которого ищут в виде $y = x^r$, можно попробовать искать решения уравнения Бесселя в виде

$$y = x^r (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) \quad (c_0 \neq 0).$$

⁶Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Т. 1, гл. II.

Подставив это выражение в уравнение Бесселя, получим

$$x^r \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)c_n x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)c_n x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при x^n нулю, имеем

$$\begin{cases} r(r-1)c_0 + rc_0 = 0 & \Rightarrow r = 0 \\ (r+1)rc_1 + (r+1)c_1 = 0 & \Rightarrow c_1 = 0 \\ (r+n)(r+n-1)c_n + (r+n)c_n + c_{n-2} = 0, & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

т.е. рекуррентные формулы для отыскания коэффициентов

$$\begin{cases} c_0 \neq 0, c_1 = 0, \\ c_n = -\frac{c_{n-2}}{n^2} \quad n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

В данном случае совсем не трудно превратить их в явные формулы: все коэффициенты при нечетных степенях x равны нулю, а

$$c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{2^2 k^2} = +\frac{c_{2k-4}}{2^4 k^2 (k-1)^2} = \dots = \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2} c_0.$$

Таким образом, нам удалось построить решение вида

$$y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2} x^{2k}.$$

По признаку Даламбера этот степенной ряд сходится при всех x , поэтому это формально построенное решение действительно удовлетворяет уравнению Бесселя.

Таким образом, *уравнение Бесселя нулевого порядка имеет решения, аналитические во всей комплексной плоскости*. То из них, которое принимает значение 1 в нуле называется *функцией Бесселя нулевого порядка*, обозначается как $J_0(x)$ и дается рядом

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Эту функцию традиционно не причисляют к элементарным функциям, но лишь к более широкому классу трансцендентных функций – специальным функциям математической физики.

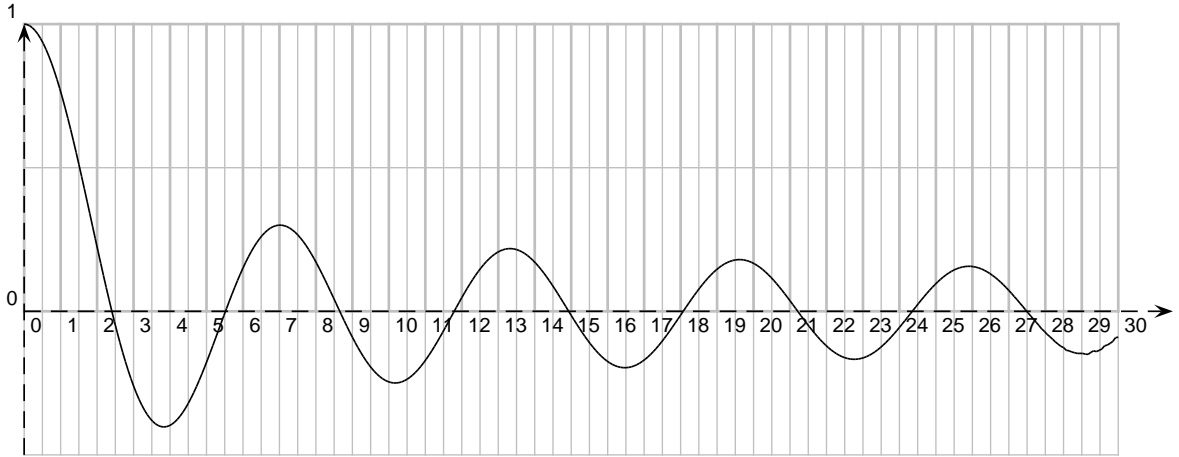


Рис. 4.2: График функции Бесселя $J_0(x)$; для построения использовано 40 первых членов ряда.

Ограничившись первыми N членами этого ряда, мы можем вычислить $J_0(x)$ при $|x| < L$ с ошибкой, которую можно оценить сверху как

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{L}{2}\right)^{2k};$$

первый член этого ряда можно оценить как

$$\frac{1}{(N+1)!^2} \left(\frac{L}{2}\right)^{2(N+1)},$$

второй – как

$$\frac{1}{(N+1)!^2} \left(\frac{L}{2}\right)^{2(N+1)} \left(\frac{L}{2(N+2)}\right)^2,$$

третий как

$$\frac{1}{(N+1)!^2} \left(\frac{L}{2}\right)^{2(N+1)} \left(\frac{L}{2(N+2)}\right)^4$$

и так далее, то есть эти члены убывают быстрее, чем члены геометрической прогрессии с

$$q = \frac{L}{2(N+2)},$$

а значит, выбрав

$$L < 2(N+2),$$

мы можем оценить ошибку сверху как

$$\frac{1}{(N+1)!^2} \left(\frac{L}{2}\right)^{2(N+1)} \frac{1}{1 - \frac{L}{2(N+2)}}.$$

Напр., ограничившись первыми 40 членами и взяв для определенности

$$L = 30 < 84,$$

чего для наших целей вполне достаточно, мы совершим ошибку 4×10^{-3} . Это позволяет построить график $J_0(x)$ (рис. 4.2). Однако, что несмотря на сходимость ряда при всех x , увеличение числа членов не способствует исчезновению болтанки, начинающейся у $x = 29$. Ее появление связано с ошибками округления, проистекающими от деления больших чисел x^{2N} и $N!$. Поэтому на практике этот ряд можно использовать для вычисления $J_0(x)$ при небольших x . Разумеется, нынче в большинстве математических пакетов имеется встроенная процедура вычисления $J_0(x)$.⁷

Поскольку коэффициенты уравнения Бесселя в нуле имеет особенность, любое решение, линейно независимое с J_0 , обязательно имеет особенность в нуле⁸. Поэтому с точностью до мультипликативной константы функция J_0 – единственное решение уравнения Бесселя, не имеющее особенности в нуле. Это позволяет, вернувшись к исходной задаче (4.5), сразу заметить,

⁷Напр., SF24R в Библиотеке Численного Анализа НИВЦ МГУ, где используются два разных алгоритма, один – для $x < 4$, а другой – для $x > 4$.

⁸Строгое доказательство этого утверждения опирается на теорию линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Поскольку в уравнении Бесселя коэффициент при y' равен $\frac{1}{x}$, определитель Вронского любой системы линейно независимых решений уравнения Бесселя равен

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = \text{Const.} \exp\left(-\int \frac{dx}{x}\right) = \frac{C_1}{x},$$

откуда

$$\frac{d}{dx} \frac{y_2}{y_1} = \frac{C_1}{y_1^2 x}$$

и при $y_1 = J_0(x)$ имеем

$$y_2 = J_0(x) \left(C_1 \int_1^x \frac{d\xi}{\xi J_0(\xi)^2} + C_2 \right),$$

Поскольку $J_0(0) = 1$, выписанный интеграл имеет логарифмическую особенность в нуле. См. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям, §12.

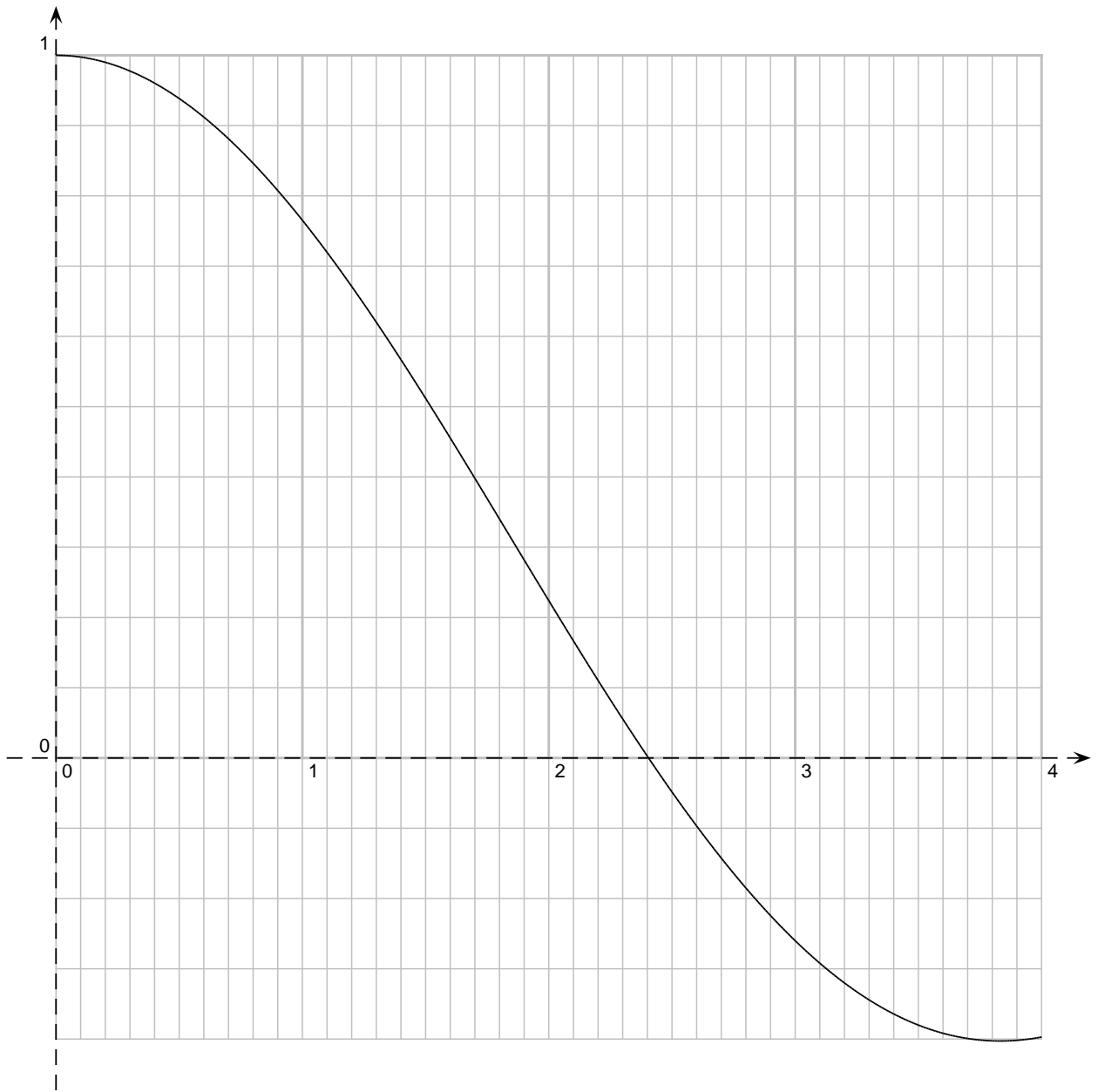


Рис. 4.3: К определению первого нуля функции Бесселя $J_0(x)$, ср. табличное значение $j_{0,1} = 2.40483$.

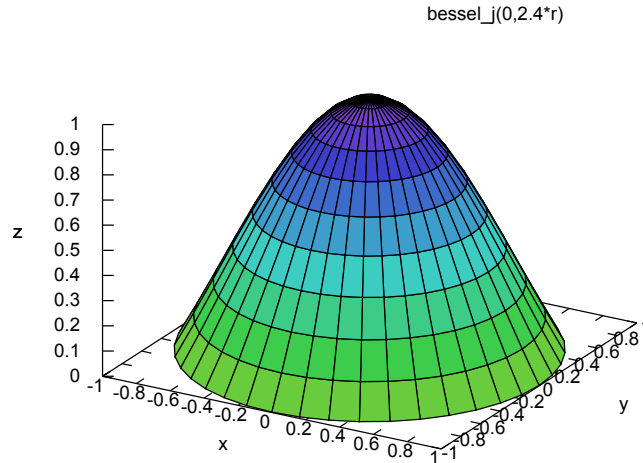


Рис. 4.4: Первая собственная функция единичного круга, вычисленная по формуле $u_0 = J_0(j_{0,1}r)$.

что только функция

$$u = C J_0(\sqrt{\lambda}r)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению и условию ограниченности в нуле. Условие же на границе $r = a$ дает уравнение для отыскания собственного значения:

$$J_0(\sqrt{\lambda}a) = 0. \tag{4.6}$$

Как видно на рис. 4.2, функция Бесселя имеет положительные нули; их нумеруют в порядке возрастания и обозначают как

$$j_{0,1}, j_{0,2}, \dots$$

К сожалению, эти числа не удалось вычислить в конечном виде, то есть выразить в виде отношения целых чисел или, скажем, через известные трансцендентные числа⁹. Однако эти числа легко найти графически, напр., по рис. 4.3 видно, что $j_{0,1} \approx 2.4$. С удивительно хорошей точностью их можно найти штатными средствами **Giac**:

⁹Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Т. 1. §15.28

[1] restart; J0:=sum((-1)^k*x^(2*k)/(2^(2*k)*(k!)^2),k=0..40);

$$[J0, "x", j0], 1 - \left(\frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^4}{64} - \left(\frac{x^6}{2304}\right) + \frac{x^8}{147456} - \left(\frac{x^{10}}{14745600}\right) + \dots]$$

[2] j0:=fsolve(J0,x=2..30);

[2.404826, 5.520078, 8.653728, 11.791534, 14.930918, 18.071064, 21.211637, 24.352516, 27.492205]

Для сравнения: согласно wolframalpha.com

$$j_{0,1} = 2.4048255576957727686216318793264546431242449 \dots$$

$$j_{0,9} = 27.493479132040254795877288234607414546529568 \dots$$

Возвращаясь к 4.6, можем утверждать следующее: *первое собственное значение круга*

$$\lambda_1 = \frac{j_{0,1}^2}{a^2} \frac{5.7831 \dots}{a^2},$$

частота

$$\omega_1 = \frac{2.4048 \dots}{a} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

им отвечает собственная функция

$$u_1 = J_0(j_{0,1}r/a).$$

Мультипликативную константу обычно опускают, поскольку всякая собственная функция определена с точностью до такой константы. График собственной функции визуально мало отличается от параболоида вращения с центром в нуле (см. рис. 4.4).

4.4.2 Первое собственное значение прямоугольника

Пусть Ω – прямоугольник со сторонами a и b . Поместим начало декартовой системы координат в его левый нижний угол и направим оси вдоль сторон прямоугольника. Поскольку в декартовой системе координат лапласиан распадается на сумму

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

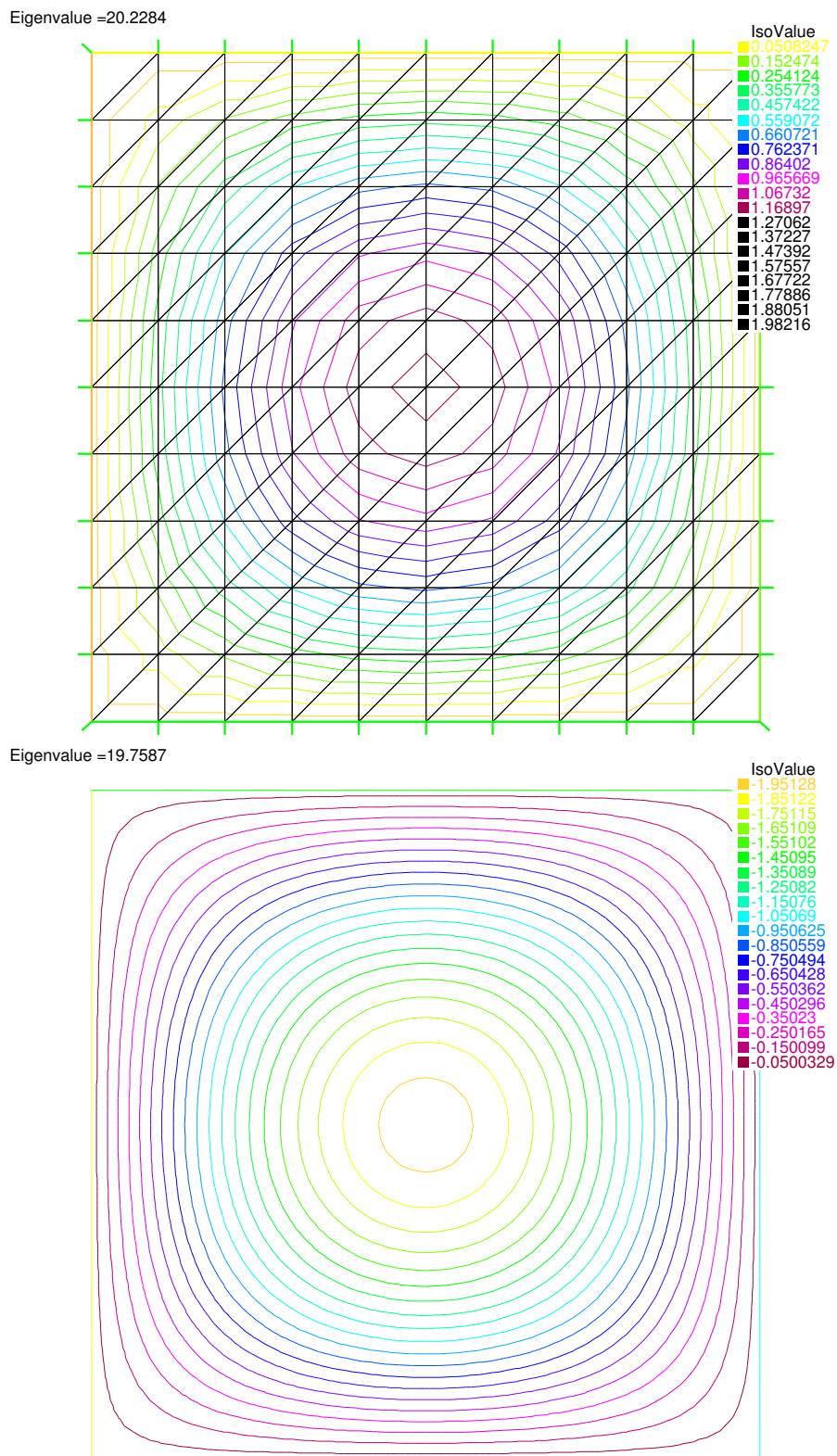


Рис. 4.5: Первая собственная функция единичного квадрата, вычисленная МКЭ. Получающиеся значения для λ_1 можно сравнить с точным $\lambda_1 = 2\pi^2 = 19.7392 \dots$

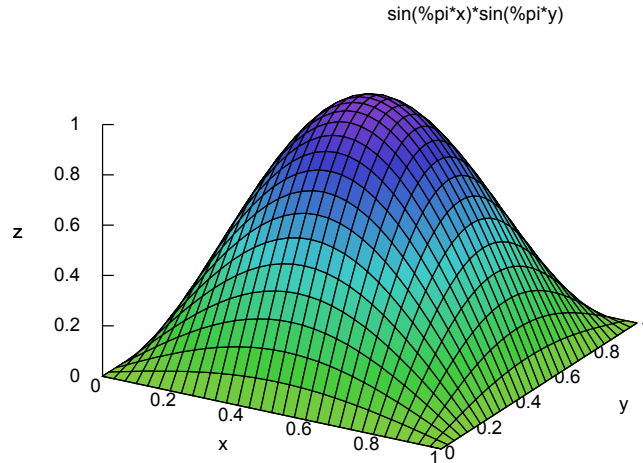


Рис. 4.6: Первая собственная функция единичного квадрата, вычисленная по точной формуле.

можно попытаться искать собственную функцию в виде

$$u = X(x)Y(y).$$

Подставляя в (4.2) это выражение, получим

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda XY = 0,$$

разделяя переменные, это равенство можно переписать так

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y) + \lambda Y(y)}{Y(y)}.$$

Левая часть этого равенства зависит разве только от x , права – разве только от y , поэтому на самом деле обе не зависят ни от x , ни от y . Отсюда

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y) + \lambda Y(y)}{Y(y)} = \text{Const.}$$

Обозначая константу как μ и вспоминая про граничные условия, имеем

$$\{X'' - \mu X = 0, \quad X(0) = X(a) = 0.$$

Эта одномерная задача на собственные значения, она имеет решения только при $\mu = -\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$ ($n \in \mathbb{N}$), и тогда решением будет $X = \sin \frac{\pi n x}{a}$. Но тогда

для Y получается задача

$$\{Y'' + (\lambda - (\frac{\pi n}{a})^2)Y = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0$$

которая имеет решение только при

$$\lambda - (\frac{\pi n}{a})^2 = (\frac{\pi m}{b})^2 \quad (m \in \mathbb{N})$$

и решение это $-Y = \sin \frac{\pi m y}{b}$. Таким образом, задача на собственные значения (4.2) в прямоугольнике $a \times b$ имеет собственными значениями числа

$$\lambda = (\frac{\pi n}{a})^2 + (\frac{\pi m}{b})^2 \quad (m, n \in \mathbb{N}),$$

и каждому из них отвечает собственная функция

$$u = \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}.$$

В этом семействе имеется только одна функция, не имеющая узловых линий, та, которая отвечает $n = m = 1$. Поэтому *наименьшее собственное значение задачи (4.2) в прямоугольнике $a \times b$ равно*

$$\lambda_1 = (\frac{\pi}{a})^2 + (\frac{\pi}{b})^2,$$

ему отвечает собственная функция

$$u_1 = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

В частности, в квадрате $a \times a$

$$\lambda_1 = \frac{2\pi^2}{a^2} = \frac{19.7392 \dots}{a^2}, \quad u_1 = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}.$$

При повороте на $\pi/2$ квадрат переходит сам в себя, также ведет себя и первая собственная функция.

4.4.3 Первая собственная функция равностороннего треугольника

Пусть теперь Ω – равносторонний треугольник со сторонами, равными a . В декартовой системе координат его стороны можно описать уравнениями

$$y = \sqrt{3}x, \quad y = -\sqrt{3}x, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}a;$$

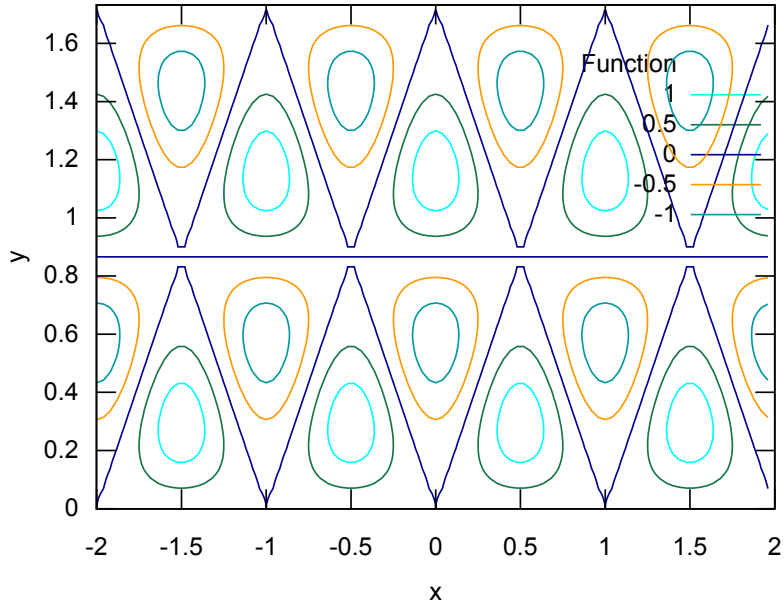


Рис. 4.7: Линии уровня для функций u .

следуя аналогии с задачей в квадрате, из синусов можно составить произведение, обращающееся в нуль на этих прямых:

$$u = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}y\right) \sin k(y - \sqrt{3}x) \sin k(y + \sqrt{3}x).$$

Покажем, что константу k можно подобрать таким образом, чтобы отношение $\Delta u : u$ не зависело от x и y .

Именно, это выражение можно представить как сумму синусов:

$$\begin{aligned} u &= 2 \sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}y\right) [\cos 2k\sqrt{3}x - \cos 2ky] = \\ &= \sin 2\left(k\sqrt{3}x + \frac{\pi}{\sqrt{3}a}y\right) + \sin 2\left(k\sqrt{3}x - \frac{\pi}{\sqrt{3}a}y\right) \\ &+ \sin 2\left(k + \frac{\pi}{\sqrt{3}a}\right)y + \sin 2\left(k - \frac{\pi}{\sqrt{3}a}\right)y \end{aligned}$$

при этом

$$\Delta \sin 2\left(k\sqrt{3}x \pm \frac{\pi}{\sqrt{3}a}y\right) = -4\left(3k^2 + \frac{\pi^2}{3a^2}\right) \sin 2\left(k\sqrt{3}x \pm \frac{\pi}{\sqrt{3}a}y\right)$$

и

$$\Delta \sin 2\left(k \pm \frac{\pi}{\sqrt{3}a}\right)y = -4\left(k \pm \frac{\pi}{\sqrt{3}a}\right)^2 \sin 2\left(k \pm \frac{\pi}{\sqrt{3}a}\right)y$$

поэтому u будет собственной функцией, только если

$$k = \frac{\pi}{\sqrt{3}a};$$

но тогда

$$u = \sin 2\left(\frac{\pi}{a}x + \frac{\pi}{\sqrt{3}a}y\right) + \sin 2\left(\frac{\pi}{a}x - \frac{\pi}{\sqrt{3}a}y\right) + \sin \frac{4\pi}{\sqrt{3}a}y$$

и

$$\Delta u = -4\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{3a^2}\right)u = -\frac{16\pi^2}{3a^2}u.$$

Поэтому, функция

$$u = \sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}y\right) \sin \frac{\pi}{\sqrt{3}a}(y - \sqrt{3}x) \sin \frac{\pi}{\sqrt{3}a}(y + \sqrt{3}x).$$

является нетривиальным решением (4.2) в треугольнике при $\lambda = \frac{16\pi^2}{3a^2}$. Остается заметить, что эта функция не обращается в нуль в треугольнике (см. рис. 4.7), поэтому первой собственной функцией. В итоге: *первое собственное значение равностороннего треугольника со стороной a равно*

$$\lambda_1 = \frac{16\pi^2}{3a^2}.$$

Ему отвечает собственная функция, которая является произведением трех синусов.

4.4.4 Неравенства Релея

Лорд Релей заметил, что среди областей равной площади круг издает самый низкий звук, то есть первое собственное значение произвольной области Ω может быть оценено снизу:

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi}{|\Omega|} j_{0,1}^2,$$

где $j_{0,1}^2 = 5.78\dots$ – первое собственное круга единичного радиуса, причем равенство имеет место только тогда, когда область является кругом. Напр., для правильного треугольника единичной площади

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}} = 22.8\dots;$$

для прямоугольника $a \times b$ единичной площади

$$ab = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} = \pi^2(a^2 + a^{-2});$$

λ_1 минимальна при $a = 1$ и там равна $2\pi^2 = 19.7\dots$, что больше $\pi j_{0,1}^2 = 18.1\dots$. Строго неравенство Релея было доказано одновременно Фабером и Краном в 1920-х годах.

Дом. задание. Уравнение Бесселя

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} y = 0 \quad (\nu \geq 0)$$

имеет два линейно независимых решения. Первое из них не имеет в нуле особенности, называется функцией Бесселя ν -го порядка и обозначается как $J_\nu(x)$. Второе, напротив, обращается в бесконечность при $x \rightarrow +0$, называется функцией Неймана и обозначается как $N_\nu(x)$. Используя эти функции, найдите

1. первое собственное значение сектора раствора α круга радиуса a , ср. [БК], гл. II, §6;
2. первое собственное значение кольца $a < r < b$, ср. [БК], гл. II, §7.

4.5 Старшие собственные значения

Собственные функции, отвечающие собственным значениям, отличным от первого, обязательно имеют узловые линии и более того, обязательно меняют знак внутри области, поскольку для знакопостоянной функции u выражение

$$\int_{\Omega} u_1 u dx dy$$

не может быть равно нулю (ср. свойство 3). Куранту удалось доказать, что узловая линия собственной функции u_n делит область не более чем на n частей.

4.5.1 Собственные значения круга

Пусть u – какая либо собственная функция круга радиуса a . Для ее отыскания можно применить тот же прием, что и при решении краевых задач для уравнения Лапласа.

Коль скоро эта функция не имеет разрывов в круге, в полярно системе координат ее можно считать периодической функцией φ и следовательно, разложить в ряд Фурье

$$u = \frac{u_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r) \cos n\varphi + v_n(r) \sin n\varphi,$$

коэффициенты которого даются формулами

$$u_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \dots$$

Умножая $\Delta u + \lambda u = 0$ на $\cos n\varphi$ и интегрируя по φ , получим

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r u \cos(n\varphi) d\varphi + \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cos(n\varphi) d\varphi + \lambda \int_0^{2\pi} u \cos(n\varphi) d\varphi = 0$$

или

$$\frac{1}{r} (r u_n')' - \frac{n^2}{r^2} u_n + \lambda u_n = 0.$$

Таким образом, коэффициенты u_n , равно как и v_n должны удовлетворять сингулярной задаче на собственные значения:

$$\begin{cases} R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0, \\ R(a) = 0, \quad |R(0)| < \infty \end{cases}$$

Возникшее здесь дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - n^2}{x^2} y = 0,$$

называют *уравнением Бесселя n -го порядка*. Одно его решение, как и в случае $n = 0$, можно найти в виде

$$y = x^r (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) \quad (c_0 \neq 0).$$

В самом деле, подставив это выражение в уравнение Бесселя, получим

$$x^r \sum_{m=0}^{\infty} (r+m)(r+m-1)c_m x^m + x^r \sum_{m=0}^{\infty} (r+m)c_m x^m + x^r \sum_{m=0}^{\infty} (c_{m-2} - n^2 c_m) x^m = 0,$$

откуда, приравнявая коэффициенты при x^m нулю, имеем

$$\begin{cases} r(r-1)c_0 + rc_0 - n^2 c_0 = 0 & \Rightarrow r = \pm n \\ (r+1)rc_1 + (r+1)c_1 - n^2 c_1 = 0 & \Rightarrow c_1 = 0 \\ (r+m)(r+m-1)c_m + (r+m)c_m + c_{m-2} - n^2 c_m = 0, & m = 2, 3, \dots \end{cases}$$

т.е. рекуррентные формулы для отыскания коэффициентов

$$\begin{cases} c_0 \neq 0, c_1 = 0, \\ c_m = -\frac{c_{m-2}}{(r+m)^2 - n^2} \quad m = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Хорошо видно, что при $r = -n$ знаменатель в рекуррентной формуле однажды обратиться в нуль и поэтому можно брать лишь корень $r = n$.

Тогда

$$\begin{cases} c_0 \neq 0, c_1 = 0, \\ c_m = -\frac{c_{m-2}}{(n+m)^2 - n^2} = -\frac{c_{m-2}}{m(m+2n)} \quad m = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Поэтому все коэффициенты при нечетных степенях x равны нулю, а при четных

$$\begin{aligned} c_{2k} &= -\frac{c_{2k-2}}{2^2 k(k+n)} = +\frac{c_{2k-4}}{2^4 k(k-1)(k+n)(k+n-1)} = \dots = \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k+n) \dots (n+1)} c_0. \end{aligned}$$

Таким образом, нам удалось построить решение в виде ряда

$$y = c_0 x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k+n) \dots (n+1)} x^{2k},$$

сходящегося по признаку Даламбера при всех x . Константу c_0 для удобства записи ряда принимают равной

$$c_0 = \frac{1}{2^n n!}.$$

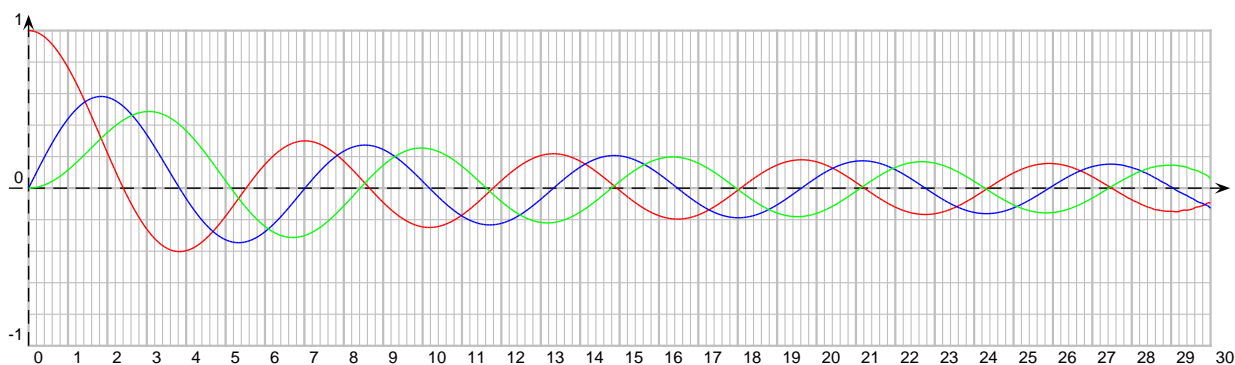


Рис. 4.8: График функции Бесселя $J_0(x)$ (красный), $J_1(x)$ (синий) и $J_2(x)$ (зеленый); для построения использовано 100 первых членов ряда.

Таким образом, уравнение Бесселя n -го порядка имеет решение, аналитические во всей комплексной плоскости, а именно

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Его называют функцией Бесселя n -го порядка. Полученное выражение в виде ряда дает возможность в интересующей нас области построить график этой функции (рис. 4.8).

Второе, линейно независимое с функцией Бесселя решение, имеет в нуле особенность, поэтому

$$u_n = a_n J_n(\sqrt{\lambda}r), \quad v_n = b_n J_n(\sqrt{\lambda}r),$$

где a_n и b_n некоторые константы. Из граничного условия получаются уравнения

$$a_n J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0, \quad b_n J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Отсюда ясно, что число $\sqrt{\lambda}a$ должно быть нулем функции Бесселя некоторого порядка.

Положительные нули функции $J_n(x)$, перенумерованные в порядке возрастания, обозначают как $j_{n,m}$. Бурже в 1866 году высказал гипотезу о том, что среди этих чисел нет равных.¹⁰ По всей видимости, она была доказана

¹⁰Ватсон Г. Теория бесселевых функций, §15.28.

лишь 1929 году на основе результатов Зигеля, но на практике ее употребляют повсеместно. В данном случае, получается, что любое собственное значение круга можно представить в виде

$$\lambda = \frac{j_{k,m}^2}{a^2},$$

при этом a_k и b_k могут быть какими угодно, а все прочие a_n и b_n должны быть равны нулю, то есть этому собственному значению отвечает собственная функция вида

$$u = J_k(j_{k,m}r/a)(a \cos k\varphi + b \sin k\varphi).$$

Прямой подстановкой можно убедиться и в обратном: для любых $k = 0, 1, 2, \dots$ и $m = 1, 2, \dots$ это выражение является собственной функцией круга. Таким образом, мы нашли, что *все собственные значения круга исчерпываются числами*

$$\lambda_{k,m} = \frac{j_{k,m}^2}{a^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots$$

причем каждому из них отвечает семейство собственных функций

$$u_{k,m} = J_k(j_{k,m}r/a)(a \cos k\varphi + b \sin k\varphi), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

При $k = 0$ мы получаем семейство однократных собственных значений

$$\lambda_{0,m} = \frac{j_{0,m}^2}{a^2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

каждому из которых отвечает по одной собственной функции

$$u = J_0(j_{0,m}r/a),$$

определенной с точностью до мультипликативной константы. Эти собственные функции не меняются при поворотах, переводящих круг сам в себя.

При $k > 0$ мы получаем семейства двукратных собственных значений

$$\lambda_{k,m} = \frac{j_{k,m}^2}{a^2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

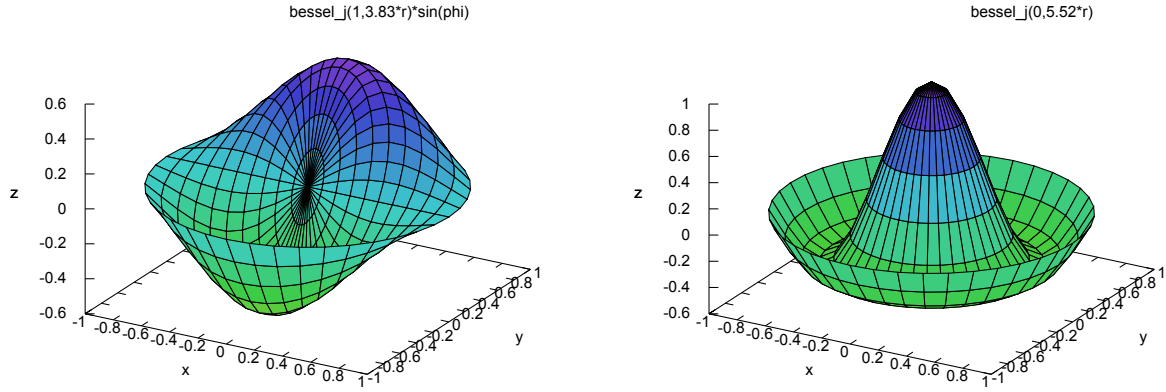


Рис. 4.9: Вторая и шестая собственные функции единичного круга.

каждому из которых отвечает семейство собственных функций

$$u_{k,m} = J_k(j_{k,m}r/a)(a \cos k\varphi + b \sin k\varphi), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

это семейство не меняется при поворотах круга, но его элементы, напр., собственная функция

$$u = J_k(j_{k,m}r/a) \cos k\varphi,$$

при поворотах переходит в другие элементы этого же семейства. Таким образом, симметрия области неизбежно ведет к кратности собственных значений.

Разыщем теперь второе по величине собственное значение, обозначенное выше как λ_2 . Мы знаем, что узловые линии отвечающих ему собственных функций должны делить круг на две части. Таких функций две: узловая линия функции

$$u_{0,2} = J_0(j_{0,2}r/a)$$

представляет собой окружность

$$r = \frac{j_{0,1}}{j_{0,2}}a,$$

а узловая линия

$$u_{1,1} = J_1(j_{1,1}r/a)(a \cos \varphi + b \sin \varphi)$$

диаметр круга, положение которого зависит от a и b (см. рис. 4.9). Глядя на рис. 4.8, видим, что первый нуль функции J_1 меньше второго нуля функции J_0 , поэтому

$$\lambda_2 = \frac{j_{1,1}^2}{a^2}$$

и ему отвечают семейство собственных функций

$$u_{1,1} = J_1(j_{1,1}r/a)(a \cos \varphi + b \sin \varphi).$$

Значит, в ряду собственных значений его повторяют дважды

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{j_{1,1}^2}{a^2}$$

и принимают, напр., что

$$u_2 = J_1(j_{1,1}r/a) \cos \varphi \quad \text{и} \quad u_3 = J_1(j_{1,1}r/a) \sin \varphi.$$

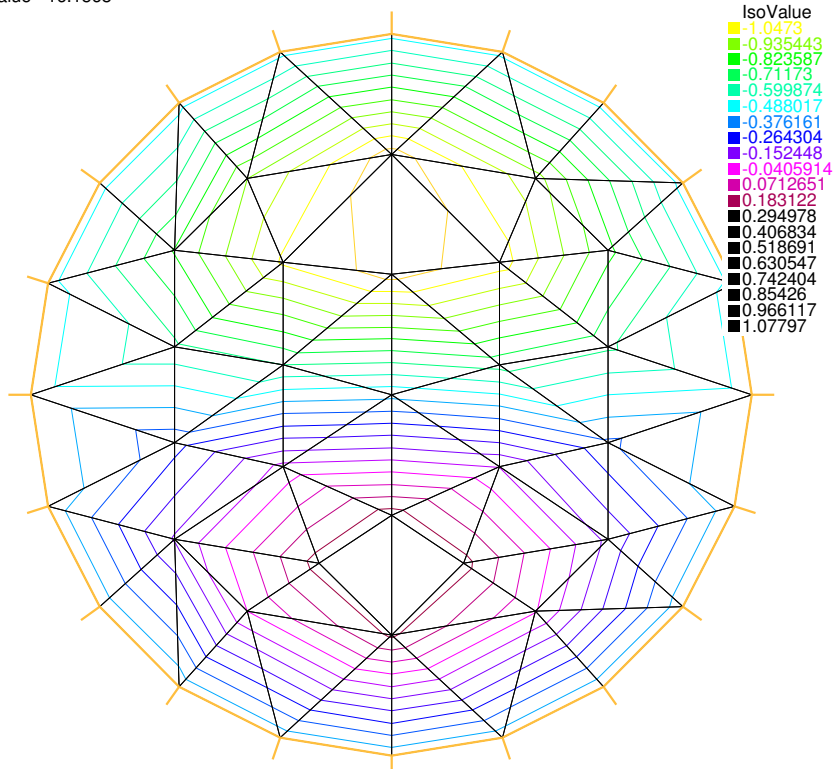
Небезынтересно отметить, как МКЭ справляется с кратными собственными значениями (см. рис. 4.10, 4.11). Из-за неравномерности триангуляции, матрицы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} утрачивают ту симметрию, которая вела к вырождению второго собственного значения, и поэтому приближенная задача имеет два однократных собственных значения λ_2^h и λ_3^h , отличающихся на мелких сетках в четвертом знаке. Отвечающие им u_2^h и u_3^h с графической точностью принадлежат семейству

$$J_1(j_{1,1}r/a)(a \cos \varphi + b \sin \varphi),$$

однако положение узловых линий u_2^h и u_3^h определяется исключительно триангуляцией и резко меняется при ее изменении.

Пример круга указывает на ряд неожиданных свойств собственных функций в общем случае. Во-первых, второе собственное значение, в отличие от первого, может быть кратным. Во-вторых, собственные функции, узловыми линиями которых делят область на две части, могут и не отвечать второму собственному значению. В данном случае, $u_{0,2}$ отвечает шестому по величине собственному значению. В-третьих, симметричные области обязательно имеют кратные собственные значения.

Eigenvalue =16.1568



Eigenvalue =14.6976

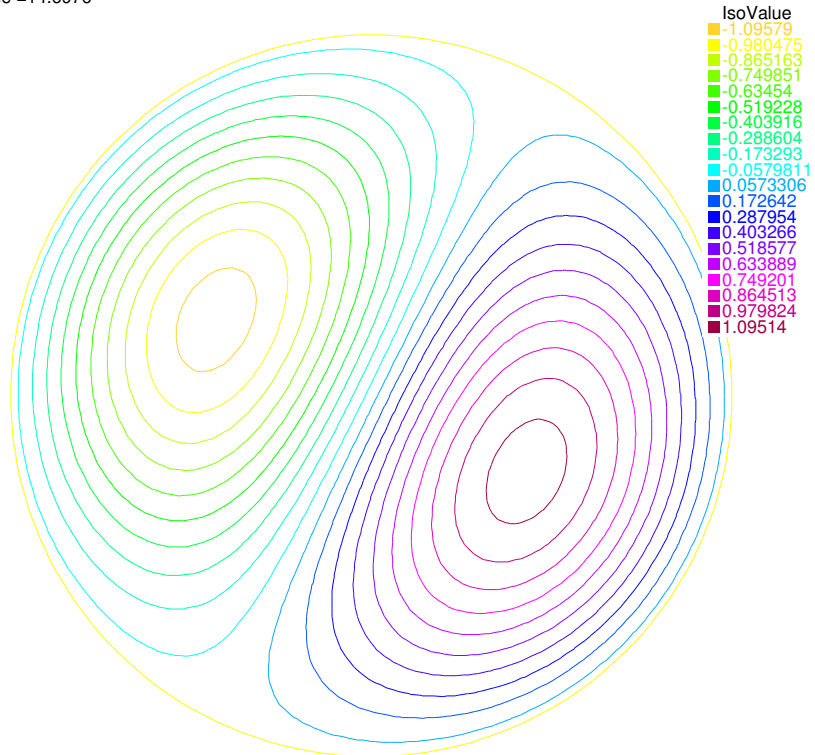
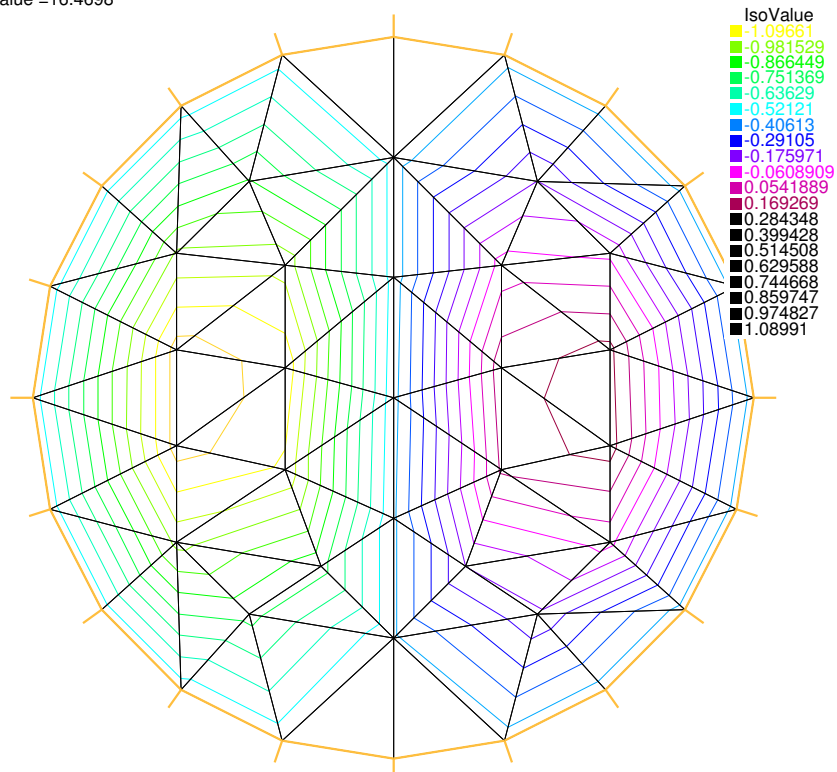


Рис. 4.10: Вторая собственная функция единичного круга, вычисленная МКЭ. На верхнем рисунке взято 20 вершин на границе, на нижнем 200. Получающиеся значения для λ_2 можно сравнить с точным $\lambda_2 = j_{1,1}^2 = 14.68 \dots$

Eigenvalue =16.4698



Eigenvalue =14.698

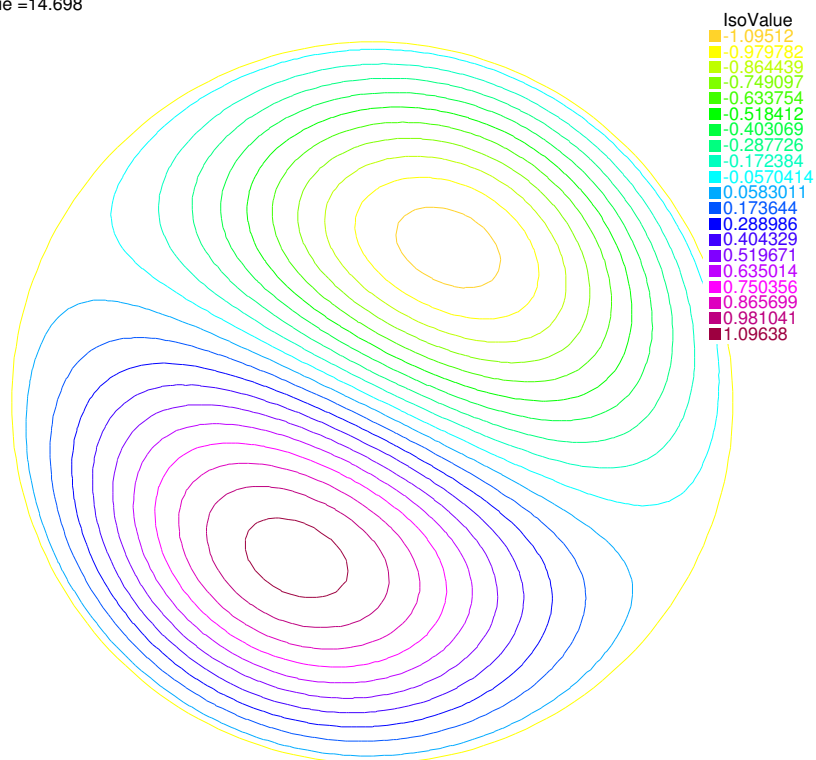


Рис. 4.11: Третья собственная функция единичного круга, вычисленная МКЭ. На верхнем рисунке взято 20 вершин на границе, на нижнем 200. Получающиеся значения для λ_2 можно сравнить с точным $\lambda_3 = \lambda_{=2} = j_{1,1}^2 = 14.68 \dots$

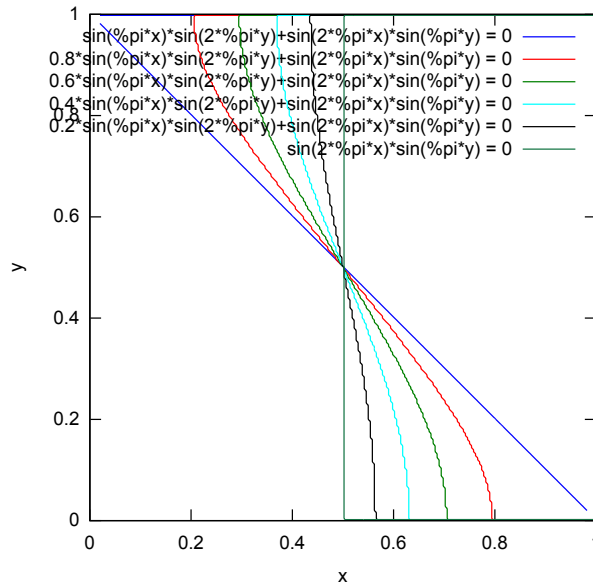


Рис. 4.12: Узловые линии собственных функций, отвечающих второму собственному значению квадрата

4.5.2 Собственные функции прямоугольника

Собственные функции прямоугольника были найдены выше методом разделения переменных. Собственными значениями прямоугольника $a \times b$ являются числа

$$\lambda_{n,m} = \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2}$$

которым, в надлежащем образом выбранной декартовой системе координат, отвечают собственные функции

$$u_{m,n} = \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}.$$

Метод разделения переменных не может дать гарантии, что задача не допускает других собственных функций, которые нельзя представить в виде $u = X(x)Y(y)$. Более того, как мы сейчас увидим это и не верно. Поэтому здесь следует или повторить размышления, использованные в пред. разделе для нахождения всех собственных функций круга, или сослаться на теорию рядов Фурье, в которой было показано, что любую функцию двух переменных можно разложить в ряд по таким синусам, то есть они уже образуют полную систему в смысле свойства 5.

Обратимся теперь к квадрату $a \times a$ и перечислим его собственные значения в порядке возрастания. Первое собственное значение нам уже известно:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi^2}{a^2}, \quad u_1 = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

второму собственному значению

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{5\pi^2}{a^2}$$

отвечают две собственные функции

$$u_{2,1} = \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \quad \text{и} \quad u_{1,2} = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a},$$

а следовательно, и целое семейство

$$C_1 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + C_2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

То обстоятельство, что второе собственное значение квадрата оказалось кратным, не должно нас удивлять: поворот на $\pi/2$ переводит квадрат в квадрат, $u_{2,1}$ в $u_{1,2}$, и лишь их линейная комбинация переходит сама в себя. Иными словами, симметрия опять приводит к вырождению второго собственного значения. Узловые линии этих собственных функций соединяют две точки границы и делят область на две части, однако эти линии далеко не при всех значениях C_1 и C_2 оказываются прямыми (см. рис. 4.12).

Еще более экзотичными могут оказаться узловые линии старших собственных функций: собственному значению

$$\lambda = \frac{\pi^2}{a^2}(4r^2 + 1)$$

отвечает собственная функция

$$u = \sin(2\pi r x/a) \sin(\pi y/a) + \mu \sin(\pi x/a) \sin(2\pi r y/a),$$

узловая линия которой при μ , близких к единице, делит область на две части и заполняет область все плотнее и плотнее с ростом r (см. рис. 4.13).

Также небезынтересно отметить, что вычисление кратности собственного

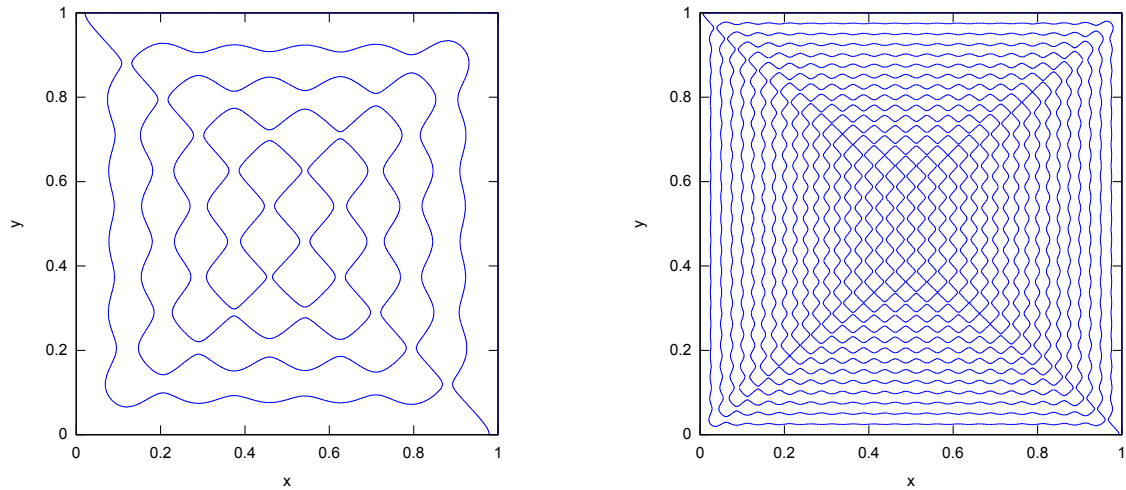


Рис. 4.13: Узловые линии функции $u = \sin(2\pi r x) \sin(\pi y) + 0.9 \sin(\pi x) \sin(2\pi r y)$ при $r = 6$ и $r = 20$.

значения λ упирается в «диофантов» вопрос о том, можно ли «данное число, являющееся суммой двух квадратов, разбить на два других квадрата» и, если можно, то сколькими способами.¹¹

Дом. задание.

1. Нарисуйте узловые линии первых 6-ти собственных функций круга.
2. Нарисуйте узловые линии первых 6-ти собственных функций квадрата.
- 3.* Докажите, что собственное значение квадрата может иметь сколь угодно большую кратность.

Указ. Воспользуйтесь рациональной параметризацией окружности $x^2 + y^2 = a^2$:

$$x = \frac{2at}{t^2 + 1}, \quad y = a \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

указанной Диофантом при решении 8 задачи II книги.

4. Для задачи на собственные значения

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

с краевыми условиями Неймана докажите, что 1.) $\lambda = 0$ – всегда является собственным значением, что 2.) все прочие собственные значения положительны, и что 3.) собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

5. Найдите наименьшее собственное значение задачи

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x=0,1} = 0 \\ u \Big|_{y=0,1} = 0 \end{cases}$$

¹¹См. задачу 9 книги II Арифметики Диофанта. То, что эта задача допускает нетривиальные решения видно из того, что, напр., $85^2 = 68^2 + 51^2 = 40^2 + 75^2$.

в квадрате 1×1 и укажите его кратность. Ср. [2], стр. 30.

6. Найдите второе собственное значение задачи

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} |_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

в квадрате 1×1 и укажите его кратность.

4.6 Возбуждение колебаний

Вынужденные колебания мембраны описываются, в полной аналогии со струной, начально-краевой задачей для уравнений колебаний:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + f, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u|_{t=0} = g(x, y), \quad u_t|_{t=0} = h(x, y). \end{cases} \quad (4.8)$$

По теореме Стеклова, классическое решение этой задачи, если оно вообще существует, может быть разложено в сходящийся хотя бы в среднем ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x, y)$$

по собственным функциям φ_n задачи (5.2), причем коэффициенты этого ряда даются формулой

$$u_n = \int_{\Omega} u(x, y, t) \varphi_n(x, y) dx dy,$$

если условится, что собственные функции отнормированы:

$$\int_{\Omega} \varphi_n^2 dx dy = 1.$$

Умножив уравнение колебаний на φ_n и проинтегрировав по всей области, получим дифференциальное уравнение для отыскания u_n . В самом деле, имеем

$$\int_{\Omega} u_{tt} \varphi_n dx dy = \int_{\Omega} \Delta u \varphi_n dx dy + \int_{\Omega} f \varphi_n dx dy.$$

В силу формулы Гаусса-Остроградского

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Delta u \varphi_n dx dy &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u) \varphi_n dx dy = \\ &= \int_{\Omega} [\operatorname{div}(\varphi_n \nabla u) - (\nabla u, \nabla \varphi_n)] dx dy = \\ &= \int_{\partial\Omega} \varphi_n \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \varphi_n) dx dy\end{aligned}$$

Здесь интеграл по границе равен нулю, так как на границе собственные функции обращаются в нуль. Аналогично,

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi_n dx dy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \varphi_n) dx dy$$

причем и здесь интеграл по границе обращается в нуль, но теперь в силу того, что решение u задачи (4.8) на границе равно нулю. Поэтому

$$\int_{\Omega} \Delta u \varphi_n dx dy = \int_{\Omega} u \Delta \varphi_n dx dy = -\lambda_n \int_{\Omega} u \varphi_n dx dy = -\lambda_n u_n = -\omega_n^2 u_n,$$

где ω_n – собственные частоты мембраны. Остается заметить, что

$$\int_{\Omega} u_{tt} \varphi_n dx dy = \frac{d^2}{dt^2} u_n.$$

В итоге, получается, что

$$\ddot{u}_n + \lambda_n u_n = f_n, \quad \text{где } f_n = \int_{\Omega} f \varphi_n dx dy.$$

Начальные условия, как и для струны, дают начальные условия для этого обыкновенного дифференциального уравнения:

$$u_n|_{t=0} = \int_{\Omega} u|_{t=0} \varphi_n dx dy = \int_{\Omega} g \varphi_n dx dy = g_n$$

и

$$\dot{u}_n|_{t=0} = \int_{\Omega} u_t|_{t=0} \varphi_n dx dy = \int_{\Omega} h \varphi_n dx dy = h_n.$$

Таким образом, классическое решение задачи (4.8) дается сходящимся в среднем рядом

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x, y), \quad (4.9)$$

коэффициенты которого однозначно определяются из задач Коши

$$\ddot{u}_n + \omega_n^2 u_n = f_n, \quad u_n|_{t=0} = g_n, \quad \dot{u}_n|_{t=0} = h_n, \quad (4.10)$$

где

$$f_n(t) = \int_{\Omega} f \varphi_n dx dy, \quad g_n = \int_{\Omega} g \varphi_n dx dy, \quad h_n = \int_{\Omega} h \varphi_n dx dy. \quad (4.11)$$

Практическое вычисление решения затруднено необходимостью вычисления этих интегралов. Часто оказывается удобно отказаться от условия

$$\int_{\Omega} \varphi_n^2 dx dy = 1,$$

и вместо (4.11) прямо использовать то, что функции g , h и f всегда можно разложить в ряды

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n(x, y), \dots,$$

коэффициенты которых и нужно подставлять в 4.10. Их всегда можно найти, используя ортогональность собственных функций:

$$\int_{\Omega} g \varphi_m dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \int_{\Omega} \varphi_n \varphi_m dx dy = g_m \int_{\Omega} |\varphi_m|^2 dx dy.$$

4.6.1 Возбуждение мембраны ударом и щипком

Формула (4.9) весьма удобна для качественного описания колебаний мембраны, возбужденных ударом или щипком. Эти колебания описываются задачей

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u|_{t=0} = g(x, y), \quad u_t|_{t=0} = h(x, y), \end{cases} \quad (4.12)$$

решением которой дается рядом

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n \cos(\omega_n t) + \frac{h_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right] \varphi_n(x, y), \quad (4.13)$$

то есть представляет собой суперпозицию собственных колебаний. В частности, спектральный анализ звука, издаваемого колеблющейся мембраной, должен выделить дискретный набор, состоящий из ее собственных частот.

Для примера рассмотрим колебания круглой мембраны, возбужденной симметричным щипком:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & r < 1 \\ u|_{r=1} = 0 \\ u|_{t=0} = f(r), & u_t|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

Мы знаем, что все собственные частоты круга исчерпываются набором

$$j_{n,m}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots$$

и им соответствуют собственные функции

$$J_n(j_{n,m}r)(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

но не знаем, в каком порядке их перенумеровать. Однако для решения задачи это и не важно – сумму по n в (4.19) можно заменить на двойную сумму по n и m . Иными словами, решение всегда можно разложить в ряд

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(j_{n,m}r)(f_{n,m}^c \cos n\varphi + f_{n,m}^s \sin n\varphi) \cos(j_{n,m}t),$$

где $f_{n,m}^c$ – коэффициент ряда для f , то есть

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(j_{n,m}r)(f_{n,m}^c \cos n\varphi + f_{n,m}^s(t) \sin n\varphi).$$

Но f по условию не зависит от φ , поэтому все коэффициенты $f_{n,m}^c, f_{n,m}^s$ равны нулю при $n > 0$.¹² Это позволяет опустить во всех нижеследующих

¹²Это можно доказать и из формулы (4.11), которая в данном случае дает

$$f_{n,m}^c = \iint_{\Omega} f(r) J_n(j_{n,m}r) \cos n\varphi r dr d\varphi : \iint_{\Omega} |J_n(j_{n,m}r)|^2 \cos^2 n\varphi r dr d\varphi,$$

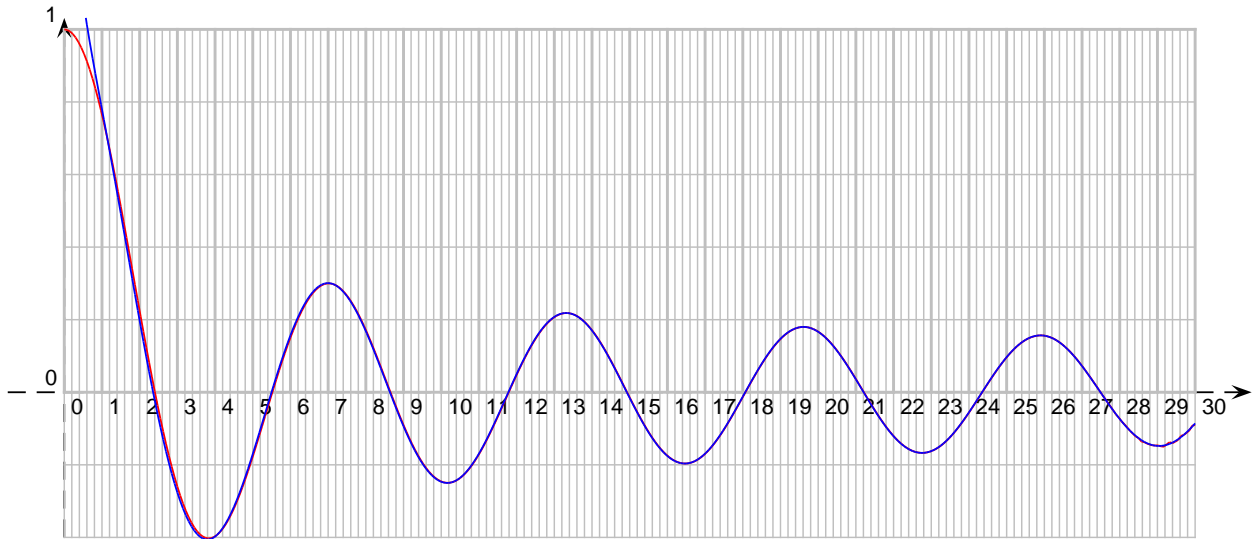


Рис. 4.14: Графики функций $J_0(x)$ и $\sqrt{2/\pi x} \cos(x - \frac{\pi}{4})$.

формулах индекс n , всюду равный нулю. Итак, решение (4.14) разлагается в ряд

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m J_0(j_{0,m} r) \cos(j_{n,m} t),$$

где f_m – коэффициент ряда для f :

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m J_0(j_{0,m} r).$$

Отсюда видно, что колебания, возбужденные симметричным щипком, составлены из собственных колебаний с частотами $j_{0,m}$. С тем, чтобы представить себе этот набор, заметим, что при $x > 2$ с графической точностью¹³

т.к.

$$\iint_{\Omega} f(r) J_n(j_{n,m} r) \cos n\varphi r dr d\varphi = \int_0^1 J_n(j_{n,m} r) f(r) r dr \int_0^{2\pi} \cos n\varphi d\varphi$$

равен нулю при $n > 0$.

¹³В [1], гл. IX, §2.10, доказывается, что

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{\pi}{4}) + O(x^{-3/2}),$$

то есть сказанное верно при достаточно больших x . Замечательно, что эти «достаточно большие» x начинаются с $x = 2$.

верно

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.15)$$

(ср. рис. 4.14). Поэтому

$$j_{0,m} \approx \pi m - \frac{\pi}{4}.$$

Ошибка этой формулы для $m = 1$ составляет 2% от $j_{0,m}$, и становится еще меньше с ростом m . Таким образом, частоты так возбужденной круглой мембраны образуют сдвинутый на $\frac{\pi}{4}$ гармонический ряд.

Обратимся теперь к вопросу о вычислении f_m . Имеем:

$$f_m = \int_0^1 J_0(j_{0,m}r) f(r) r dr : \int_0^1 |J_0(j_{0,m}r)|^2 r dr$$

или, сделав замену переменной $x = j_{0,m}r$,

$$f_m = \int_0^{j_{0,m}} J_0(x) f(x/j_{0,m}) x dx : \int_0^{j_{0,m}} |J_0(x)|^2 x dx.$$

Иногда интеграл от функции Бесселя удается вычислить явно, воспользовавшись тем, что эта функция удовлетворяет уравнению Бесселя

$$\frac{1}{x}(xJ_0'(x))' + J_0(x) = 0$$

и поэтому

$$xJ_0(x) = -(xJ_0'(x))'. \quad (4.16)$$

Применительно к интегралу, стоящему в знаменателе, имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{j_{0,m}} J_0^2(x) x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{j_{0,m}} J_0^2(x) dx^2 = \\ &= \frac{1}{2} x^2 J_0^2(x) \Big|_{x=0}^{j_{0,m}} - \int_0^{j_{0,m}} x^2 J_0(x) J_0'(x) dx = \\ &= - \int_0^{j_{0,m}} (xJ_0(x)) x J_0'(x) dx = \int_0^{j_{0,m}} x J_0'(x) (xJ_0'(x))' dx = \\ &= \frac{1}{2} (j_{0,m} J_0'(j_{0,m}))^2. \end{aligned}$$

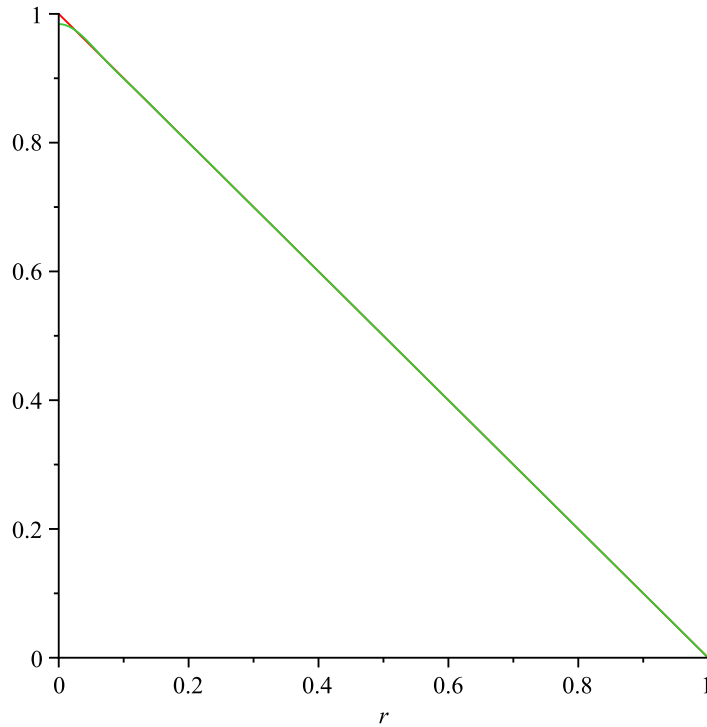


Рис. 4.15: Графики функций $1 - r$ и суммы первых 20 членов ее ряда Фурье.

Таким образом,

$$f_m = 2(j_{0,m} J'_0(j_{0,m}))^{-2} \int_0^{j_{0,m}} J_0(x) f(x/j_{0,m}) x dx.$$

Напр., если начальный профиль мембраны был конусом с вершиной в нуле, скажем

$$u|_{t=0} = 1 - r,$$

то

$$f_m = 2(j_{0,m} J'_0(j_{0,m}))^{-2} \int_0^{j_{0,m}} J_0(x) (1 - x/j_{0,m}) x dx.$$

Вычислив этот интеграл численно¹⁴ можно проверить выполнение равен-

¹⁴На самом деле Марле выражает его через функции Струве (**StruveH**), то есть решения неоднородного уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = Cx.$$

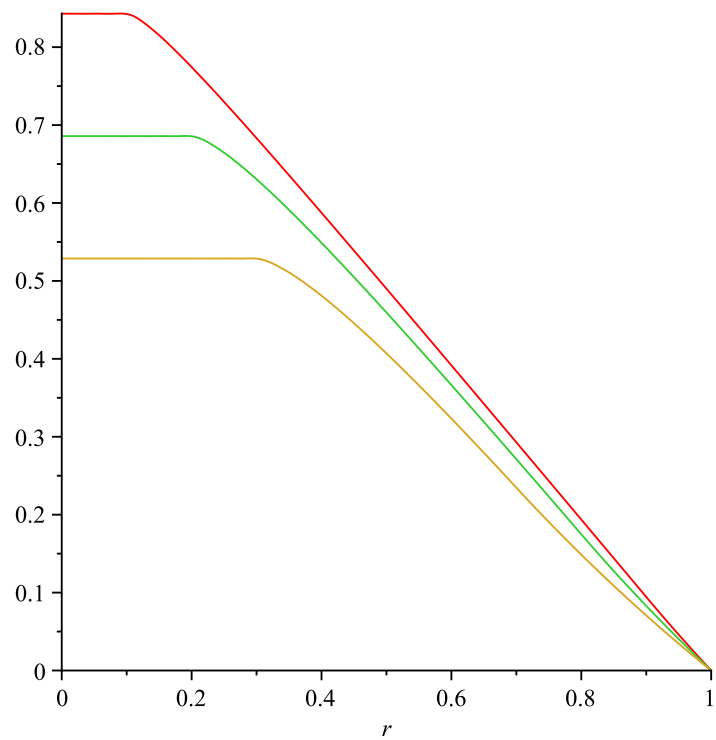


Рис. 4.16: Графики решения при $t = 0.1$ (красный), $t = 0.2$ (зеленый) и $t = 0.3$ (желтый). Для построения взято 100 членов ряда Фурье.

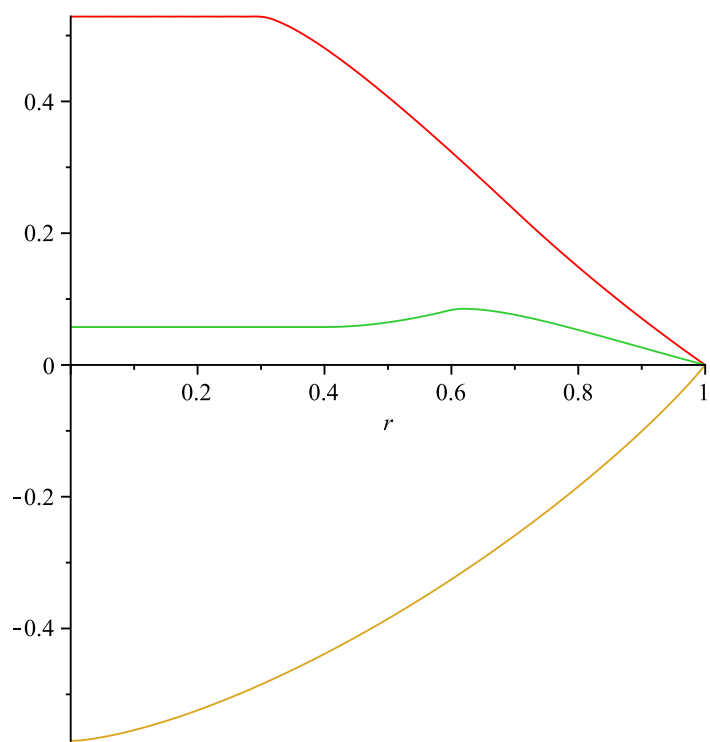


Рис. 4.17: Графики решения при $t = 0.3$ (красный), $t = 0.6$ (зеленый) и $t = 1$ (желтый).

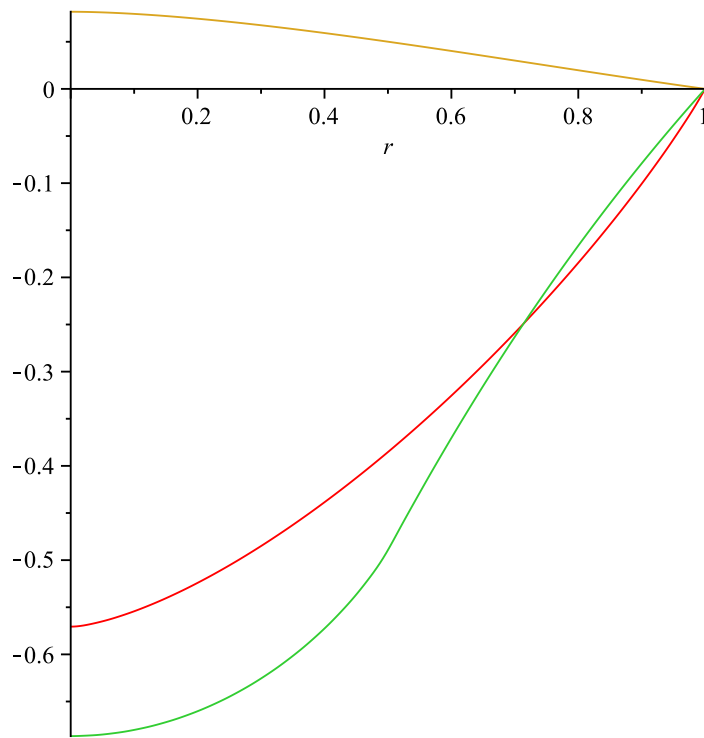


Рис. 4.18: Графики решения при $t = 1$ (красный), $t = 1.5$ (зеленый) и $t = 2$ (желтый).

ства

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m J_0(j_{0,m} r),$$

сравнив графики функции f и частичной суммы ряда (см. рис. 4.15). На рис. 4.16-4.18 представлены графики частичных сумм решения

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m J_0(j_{0,m} r) \cos(j_{n,m} t)$$

при различных t ; движение мембраны можно описать так. Как и в случае струны задача не имеет классического решения или, по крайней мере, его вторые производные весьма велики (см. рис. 4.16). В начале центре мембраны образуется плоский параллельный основанию пяточек, который расширяется и движется к основанию, на границе пяточка решение имеет разрыв производной (точно так вела себя и струна, возбужденная симметричным щипком), однако еще до достижения положения равновесия волна, отразившаяся от границы мембраны размывает границу пяточка ($t = 0.6$) и после этого мгновенный профиль мембраны становится гладким. Описать

дальнейшее развитие событий трудно, поскольку колебания складываются из большого числа функций, периоды которых несоизмеримы. В частности, поэтому движение не будет периодическим, но только ограниченным.

4.6.2 Возбуждение мембраны периодически меняющейся силой

Колебания мембраны, возбужденные периодически меняющейся силой, описываются задачей

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + f(x, y) \sin \omega t, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (4.17)$$

Сама сила f может быть сосредоточена на небольшом участке мембраны, как, напр., в известном опыте, когда точка мембраны соединена нитью с камертоном¹⁵, или же равномерно распределена по всей мембране, как, напр., при периодическом изменении давления с одной из сторон мембраны. Эта задача может использоваться для описания колебаний динамика (и тогда частота ω много больше $j_{0,1}$).

Задача Коши

$$\{\ddot{v} + \omega_0^2 v = f \sin \omega t, \quad v|_{t=0} = 0, \dot{v}|_{t=0} = 0 \quad (4.18)$$

имеет своим решением

$$v = \frac{\omega_0 \sin(\omega t) - \omega \sin(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{f}{\omega_0},$$

поэтому решение задачи 4.17 дается рядом

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n \sin(\omega t) - \omega \sin(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega^2} \frac{f_n}{\omega_n} \varphi_n(x, y). \quad (4.19)$$

Отсюда видно, что колебания, возбужденные периодической силой, частота которой отлична от собственных частот мембраны, будут тоже ограниченными при всех t ; при совпадении же частоты ω возбуждающей силы

¹⁵См. Хвольсон О.Д. Курс физики. Т.2. СПб., 1898, стр. 60.

с одной или несколькими кратными собственными частотами будет иметь место явление резонанса. Напр., при $\omega = \omega_1$

$$u = \frac{\sin(\omega_1 t) - t\omega_1 \cos(\omega_1 t)}{2\omega_1^2} f_1 \varphi_1(x, y) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\omega_n \sin(\omega t) - \omega \sin(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega^2} \frac{f_n}{\omega_n} \varphi_n(x, y).$$

Поэтому при

$$f_1 = \int_{\Omega} f(x, y) \varphi_1 dx dy \neq 0$$

со временем первый член превзойдет все прочие и

$$u \approx -\frac{f_1}{2\omega_1} t \cos(\omega_1 t) \varphi_1(x, y),$$

то есть амплитуда колебаний будет расти как t . Явление резонанса удобно использовать, чтобы наблюдать то или иное собственное колебание: если посыпать мембрану порошком и медленно менять частоту возбуждающей силы, то порошок при совпадении частоты с собственной будет выстраиваться вдоль узловых линий соответствующей собственной функции.

Для примера, обратимся теперь к случаю круглой мембраны единичного радиуса, на которую оказывается периодическое давление с одной из сторон:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + p \sin(\omega t), & r < 1 \\ u|_{r=1} = 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (4.20)$$

Начнем с того, что постоянную функцию $f(x, y) = 1$ нужно разложить в ряд Фурье

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(j_{n,m} r) (f_{n,m}^c \cos n\varphi + f_{n,m}^s \sin n\varphi),$$

эта функция не зависит φ , поэтому опять все коэффициенты $f_{n,m}^c, f_{n,m}^s$ равны нулю при $n > 0$ ¹⁶, то есть

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m J_0(j_{0,m} r).$$

¹⁶Любопытно заметить, что f не зависит и от r то же, но это не уменьшает число членов ряда, поскольку у нас нет собственных функций, не зависящих от r .

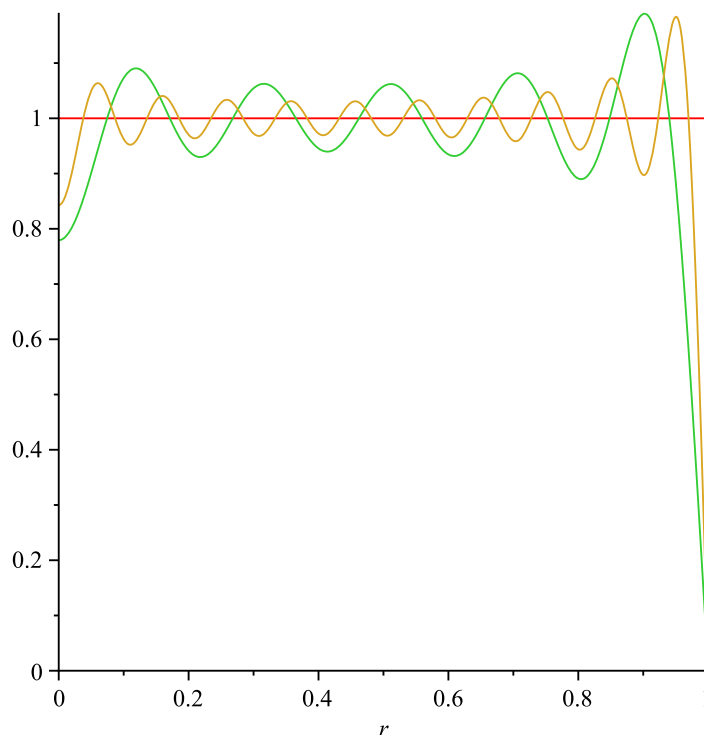


Рис. 4.19: Графики функций $f(r) \equiv 1$ и суммы первых 10 и 20 членов ее ряда Фурье.

Но тогда

$$f_m = \int_0^{j_{0,m}} J_0(x) x dx : \int_0^{j_{0,m}} |J_0(x)|^2 x dx;$$

интеграл, стоящий в знаменателе мы уже считали в пред. разделе, а интеграл в числителе легко берется, поскольку в силу уравнения Бесселя

$$\frac{1}{x}(xJ'_0(x))' + J_0(x) = 0$$

подынтегральное выражение является полным дифференциалом

$$xJ_0(x) = -(xJ'_0(x))',$$

и поэтому

$$\int_0^{j_{0,m}} J_0(x) x dx = -xJ'_0(x)|_{x=0}^{j_{0,m}} = -j_{0,m}J'_0(j_{0,m}).$$

В итоге имеем

$$f_m = -j_{0,m}J'_0(j_{0,m}) : \frac{1}{2}(j_{0,m}J'_0(j_{0,m}))^2 = -\frac{2}{j_{0,m}J'_0(j_{0,m})}.$$

Выполнение формулы

$$1 = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2J_0(j_{0,m}r)}{j_{0,m}J_0'(j_{0,m})}. \quad (4.21)$$

можно проверить (см. рис. 4.19). Этот ряд должен сходиться в среднем к 1, но его коэффициенты убывают весьма медленно. Заменяя J_0 на ее приближенное значение (4.15), годное при больших x , имеем

$$f_m \approx \frac{2\sqrt{2}(-1)^{m+1}}{\sqrt{4m-1}}.$$

Разумеется, при $r = 0$ и $r = 1$ наблюдается явление Гиббса.

Обратимся теперь к разложению решения (4.20) в ряд

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(j_{n,m}r)(u_{n,m}^c(t) \cos n\varphi + u_{n,m}^s(t) \sin n\varphi),$$

коэффициенты $u_{n,m}$ и $v_{n,m}$ определяются как решения задач Коши

$$\{\ddot{u}_{n,m}^c + j_{n,m}^2 u_{n,m}^c = f_{n,m}^c p \sin(\omega t), \quad u_{n,m}^c|_{t=0} = g_{n,m}^c p \sin(\omega t), \quad \dot{u}_{n,m}^c|_{t=0} = h_{n,m}^c,$$

а $f_{n,m}^c$ – все тот же коэффициент ряда для функции $f \equiv 1$. Коль скоро все коэффициенты $f_{n,m}^c$, $f_{n,m}^s$ равны нулю при $n > 0$, при таких n для $u_{n,m}^c$, $u_{n,m}^s$ получается однородная задача Коши, то есть

$$u_{n,m}^c = u_{n,m}^s = 0 \quad (n > 0).$$

Опуская индекс n , всюду равный нулю, имеем

$$\{\ddot{u}_m + j_{n,m}^2 u_{n,m} = f_m^c p \sin(\omega t), \quad u_m|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_m|_{t=0} = 0,$$

откуда, взяв f_m из (4.21), имеем

$$u_m = - \frac{j_{0,m} \sin(\omega t) - \omega \sin(j_{0,m}t)}{j_{0,m}^2 - \omega^2} \frac{2p}{j_{0,m}^2 J_0'(j_{0,m})}.$$

Таким образом, решение задачи (4.20), если оно вообще существует, дается сходящимся в среднем рядом

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2p}{j_{0,m}^2 J_0'(j_{0,m})} \frac{j_{0,m} \sin(\omega t) - \omega \sin(j_{0,m}t)}{j_{0,m}^2 - \omega^2} J_0(j_{0,m}r).$$

Поскольку коэффициенты f_m убывают медленно, решение представляет собой суперпозицию большого числа колебаний с несоизмеримыми частотами и близкими амплитудами, описать наложение которых весьма затруднительно. Понятно лишь, что при приближении ω к собственной частоте $j_{0,m}$ m -ая мода станет самой заметной, а профиль колебания обретет форму соответствующей собственной функции.

Глава 5

Первая краевая задача для уравнения Пуассона

5.1 Разложение по собственным функциям

Поскольку любая функция, заданная в области Ω , может быть разложена в ряд по собственным функциям мембраны, решения краевых задач естественно искать в виде такого ряда.

Обратимся теперь к краевой задаче для уравнения Пуассона (ср. раздел 3):

$$\begin{cases} \Delta u = -f, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Классическое решение этой задачи может быть разложено в сходящийся хотя бы в среднем ряд

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi_n(x, y),$$

где φ_n – собственные функции задачи

$$\begin{cases} \Delta \varphi + \lambda \varphi = 0, & (x, y) \in \Omega \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

упорядоченные так, как было указано выше в разделе 4.2. Нормируем собственные функции так, чтобы

$$\int_{\Omega} \varphi_n^2 dx dy = 1,$$

тогда по свойству 5 из раздела 4.2

$$\int_{\Omega} \varphi_n \varphi_m dx dy = \delta_{nm}$$

и

$$u_n = \int_{\Omega} u \varphi_n dx dy.$$

Умножив уравнение Пуассона на φ_n и проинтегрировав по всей области, получим

$$\int_{\Omega} \Delta u \varphi_n dx dy = - \int_{\Omega} f \varphi_n dx dy.$$

В силу формулы Гаусса-Остроградского

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u \varphi_n dx dy &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u) \varphi_n dx dy = \\ &= \int_{\Omega} [\operatorname{div}(\varphi_n \nabla u) - (\nabla u, \nabla \varphi_n)] dx dy = \\ &= \int_{\partial \Omega} \varphi_n \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \varphi_n) dx dy \end{aligned}$$

Здесь интеграл по границе равен нулю, так как на границе собственные функции обращаются в нуль. Аналогично,

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi_n dx dy = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \varphi_n) dx dy$$

причем и здесь интеграл по границе обращается в нуль, но теперь в силу того, что решение u задачи (5.1) на границе равно нулю. Поэтому

$$\int_{\Omega} \Delta u \varphi_n dx dy = \int_{\Omega} u \Delta \varphi_n dx dy = -\lambda_n \int_{\Omega} u \varphi_n dx dy = -\lambda_n u_n.$$

В итоге, из уравнения Пуассона получилось след.:

$$\lambda_n u_n = \int_{\Omega} f \varphi_n dx dy.$$

Таким образом, классическое решение задачи (5.1) дается рядом

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x, y) \int_{\Omega} f(\xi, \eta) \varphi_n(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (5.3)$$

который сходится хотя бы в среднем.

Замечание. – Часто ошибочно полагают, что решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -f, & (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

нельзя разложить в ряд по собственным функциям задачи (5.2), поскольку u не обращается в нуль на границе области. На самом деле, для сходимости в среднем это не важно. Дело же в том, что теперь в формуле

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi_n dx dy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \varphi_n) dx dy$$

не исчезает интеграл по границе и из уравнения Пуассона не получается простого выражения для u_n .

Если f легко представить в виде линейной комбинации собственных функций, то ответ выписывается мгновенно. Напр., пусть требуется решить задачу в единичном круге:

$$\begin{cases} \Delta u = -J_0(j_{0,1}r), & r < 1 \\ u|_{r=1} = 0 \end{cases}$$

Как мы знаем, $J_0(j_{0,1}r)$ – первая собственная функция круга, поэтому

$$\varphi_1 = C J_0(j_{0,1}r),$$

где C – некоторая константа, вычислять которую нам не придется. Тогда

$$\int_{\Omega} \varphi_n J_0(j_{0,1}r) dx dy = \frac{1}{C} \int_{\Omega} \varphi_n \varphi_1 dx dy = \frac{\delta_{1n}}{C}$$

и значит

$$u(x, y) = \frac{1}{C \lambda_1} \varphi_1(x, y) = \frac{1}{\lambda_1} J_0(j_{0,1}r) = \frac{1}{j_{0,1}^2} J_0(j_{0,1}r).$$

Впрочем, к этому выводу можно было бы придти сразу, вспомнив, что в разделе (4.4.1) функция Бесселя и появилась как решение уравнения

$$\Delta J_0(j_{0,1}r) = -j_{0,1}^2 J_0(j_{0,1}r).$$

Изложенный метод переносится без изменений на трехмерный случай, только вместо собственных функций мембраны (т.е. двумерного объекта), придется рассматривать собственные функции трехмерной области Ω .

5.2 Функция Грина и задача о заземленной полости

Функция Грина возникла в середине XIX века при решении задач электростатики. Своеобразие этих задач состоит в том, что в них фигурируют как распределенные по пространству величины, так и сосредоточенные (напр., поле и точечный заряд).

Пусть точечный заряд q помещен в точку M_0 полости Ω , граница которой заземлена, а сама полость заполнена однородным веществом, характеризующимся диэлектрической проницаемостью ε . Напр., для воздуха можно принять

$$\varepsilon \approx 8,8 \times 10^{-12} [\text{Ф/м}].$$

Поле \vec{E} , возникающее вокруг заряда q , отличается от кулоновского из-за того, что на поверхности полости возникает поверхностный заряд, плотность ρ которого

$$\rho = -(\vec{D}, n).$$

Поле \vec{E} имеет особенность в точке M_0 и, поскольку в силу уравнений Максвелла $\text{rot } \vec{E} = 0$ вне точки M_0 , является потенциальным, то есть его можно представить в виде

$$\vec{E} = -\nabla u.$$

Условие заземленности границы означает постоянство потенциала на границе, и, коль скоро потенциал определен с точностью до аддитивной постоянной, примем

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

В силу уравнений Максвелла Поток вектора $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ через произвольную поверхность равен заряду, заключенному внутри этой поверхности. В окрестности произвольной точки полости Ω , отличной от точки M_0 , зарядов нет, поэтому

$$\iint_S (\vec{D}, n) d\sigma = - \iint_S \varepsilon(\nabla u, n) d\sigma = 0$$

и в силу произвольности выбора S и теоремы Гаусса-Остроградского

$$\Delta u = 0.$$

Напротив, если S содержит точку M_0 , то

$$- \iint_S \varepsilon(\nabla u, n) d\sigma = q,$$

или

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = -\frac{q}{\varepsilon}.$$

Таким образом, потенциал является гармонической функцией, имеющей в точке M_0 такую особенность, что

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = -\frac{q}{\varepsilon}.$$

Поскольку кулоновское поле удовлетворяет уравнениям Максвелла, одну такую функцию мы знаем, это – потенциал кулоновского поля

$$u = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{|MM_0|}.$$

Впрочем, в этом можно убедиться и прямым вычислением: в сферической системе координат с центром в точке M_0 верно

$$\Delta \frac{q}{4\pi\varepsilon r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \frac{1}{r} = 0$$

при $r \neq 0$ и, если выбрать в качестве S сферу малого радиуса δ ,

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 4\pi \int_0^\delta \left(\frac{d}{dr} \frac{q}{4\pi\varepsilon r} \right) r^2 dr = -\frac{q}{\varepsilon}.$$

Разумеется, поле, создаваемое зарядом q внутри полости отлично кулоновского, поскольку кулоновское поле не обращается в нуль на границе Ω . Однако, вполне естественно предположить, что особенность потенциала u такая же, как у кулоновского поля, то есть что разность

$$v = u - \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{|MM_0|}$$

уже не имеет особенности в нуле. Тогда для нее получается краевая задача

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & (x, y) \in \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{|MM_0|}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Эта задача, в силу непрерывности $\frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{|MM_0|}$ на границе Ω , имеет и притом единственное решение (см. раздел 2.2).

Заметим, что v зависит от $\frac{q}{\varepsilon}$ линейно, поэтому потенциал можно выразить так:

$$u = \frac{q}{\varepsilon} G(M, M_0),$$

где функция G зависит только от полости Ω , но не от помещенного в нее заряда q и свойств вещества. Ее называют *функцией Грина* области Ω .

Замечание. – Предположение о том, что потенциал имеет в точке M_0 кулоновскую особенность не может быть доказано без каких либо других дополнительных предположений. Дело в том, что про разность

$$v = u - \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{|MM_0|}$$

мы знаем лишь, что она 1.) является гармонической функцией при $M \neq M_0$ и 2.) удовлетворяет условию

$$\iint_S \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Но уравнение $\Delta u = 0$ допускает бесконечно много решений, удовлетворяющих этим условиям, напр.,

$$r^{-n-1} P_n^{(m)}(\cos(\theta)) \sin(m\varphi).$$

О присоединенных полиномах Лежандра см. ниже ??.

5.2.1 Функция Грина для шара

Если поместить заряд q в точку M_0 внутри заземленного шара, то, как заметил лорд Кельвин, на его поверхности наводится заряд, который создает такое же поле, как точечный заряд помещенный в точку M_1 , сопряженную с M_0 . Эту точку называют *электростатическим изображением* точки M_0 .

Замечание. – Точка M_1 называется сопряженной с точкой M_0 относительно шара радиуса a , если эти точки лежат на одной прямой с центром шара O и

$$|OM_1| : a = a : |OM_0|.$$

Это понятие восходит к гармоническому делению прямой в греческой геометрии и лежит в основе теории поля. Там пара точек A, B гармонически сопряжена относительно двух точек C, D , если верно $OA \cdot OB = OC^2$ (где O – середина отрезка CD).¹

Зная, что дело обстоит таким образом, обосновать это утверждение совсем не трудно. Выражение

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|MM_0|} - \alpha \frac{1}{|MM_1|} \right),$$

будучи разностью двух кулоновских потенциалов, является гармонической функцией при всех M , отличных от M_0 и M_1 , имеющей внутри шара одну особую точку – M_0 , в окрестности которой она ведет себя как кулоновский потенциал. Следовательно, чтобы принять это выражение за функцию Грина шара нужно подобрать α так, чтобы эта разность была равна нулю, когда точка M оказывается на границе шара. При этом α не должно зависеть от M .

Если точка M лежит на границе шара, то треугольники $\triangle MOM_0$ и $\triangle M_1OM$ подобны, поскольку стороны при угле O состоят в отношении

$$|OM_1| : |OM| = |OM| : |OM_0|.$$

¹См. ШАЛЬ М. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. Москва: М. Катков, 1883. Гл. 1, п. 12.

Но тогда

$$|MM_1| : |MM_0| = |OM| : |OM_0| = a : |OM_0|$$

и поэтому

$$\frac{1}{|MM_0|} - \alpha \frac{1}{|MM_1|} = \frac{1}{|MM_0|} \left(1 - \alpha \frac{|OM_0|}{a} \right) = 0,$$

если взять

$$\alpha = \frac{a}{|OM_0|}.$$

Таким образом, функция Грина для шара равна

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|MM_0|} - \frac{a}{|OM_0|} \frac{1}{|MM_1|} \right). \quad (5.5)$$

Дом. задание. 1. Найдите какой суммарный заряд возникает на поверхности полости, внутри которой помещен заряд $+q$.

2. Приспособьте метод электростатических изображений для вычисления поля, возникающего вокруг заряда q , помещенного над проводящей плоскостью. Указ.: рассмотрите шар радиуса $a = \infty$. См. [4], гл. IV, §4, п. 4.

3. Докажите, что функция Грина шара симметрична, т.е. $G(M, M_0) = G(M_0, M)$.

4. Чему равна $G(M, O)$ для шара?

5.3 Функция Грина и задача о заземленной цилиндре

Аналогичным образом можно рассмотреть и плоскую задачу. Пусть внутри заземленного цилиндра сечения Ω помещают равномерно заряженную проволоку, направленную вдоль оси цилиндра. Поле \vec{E} и его потенциал u в этом случае не будут зависеть от z (ось Oz как всегда направлена по оси цилиндра). Повторяя сказанное выше, можно утверждать, что потенциал этого поля – гармоническая функция на сечении Ω , имеющая особенность в точке M_0 , в которой проволока пересекается с рассматриваемым сечением цилиндра. В окрестности этой особенности потенциал должен быть таким же, как у проволоки без цилиндра.

Этот последний – обозначим его как w – проще всего вычислить так: в полярной системе координат с центром в M_0 потенциал w зависит только

от r и при $r \neq 0$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta w = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} = 0,$$

поэтому

$$w = A \ln r + B.$$

Всякий потенциал определен с точностью до аддитивной константы, поэтому можно принять, что $w = A \ln r$. Для определения константы A вспомним, что поток вектора $\vec{D} = -\varepsilon \nabla w$ через поверхность обходящего проволоку цилиндра единичной высоты равен погонной плотности q заряда на проволоке. Поэтому не зависимо от радиуса

$$\int_0^{2\pi} \frac{dw}{dr} d\varphi = -\frac{q}{\varepsilon},$$

откуда

$$A = -\frac{1}{2\pi} \frac{q}{\varepsilon}$$

и следовательно,

$$w = \frac{q}{\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|MM_0|}.$$

Возвращаясь к потенциалу проволоки, помещенной в заземленный цилиндр, видим, что ее потенциал u можно записать как

$$\frac{q}{\varepsilon} G(M, M_0),$$

где функция G зависит только от сечения Ω цилиндра: она гармоническая во всех точках M области Ω , кроме точки M_0 , в которой она имеет особенность

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|MM_0|}.$$

Эту функцию называют функцией Грина двумерной области Ω .

Для круга эту функцию можно выписать явно:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{|MM_0|} - \ln \frac{a}{|OM_0|} \frac{1}{|MM_1|} \right), \quad (5.6)$$

где M_1 – точка, сопряженная с M_0 относительно круга.

Для произвольной плоской односвязной области можно построить функцию Грина, если известно конформное преобразование, переводящее эту область в круг единичного радиуса, точку M_0 в его центр, а границу области – в границу круга. В самом деле, пусть аналитическая функция f переводит область Ω z -плоскости в круг $|w| < 1$. Тогда $u = \Re \ln f(x + iy) = \ln |f(x + iy)|$ является однозначной гармонической вещественных переменных x, y , имеющей в области Ω одну особую точку M_0 . На границе области

$$u = \Re \ln e^{i\varphi} = 0.$$

В окрестности же особой точки

$$f(z) = c(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

и $c \neq 0$, поскольку иначе уравнение $w = f(z)$ имело бы несколько решений вблизи $z = z_0$.² Поэтому

$$\ln f(z) = \ln c + \ln(z - z_0) + \ln(1 + c_1(z - z_0) + \dots) = \ln(z - z_0) + \mathfrak{P}(z - z_0),$$

где \mathfrak{P} – ряд по целым неотрицательным степеням $z - z_0$, и далее

$$u = \ln |z - z_0| + v = \ln |MM_0| + v,$$

где v – дифференцируемая функция в окрестности M_0 . Значит,

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|f(x + iy)|}.$$

К сожалению, практическая польза этой формулы не велика, поскольку доказательство существования описанного конформного преобразования, т.н. теорема Римана, не является конструктивным.

Дом. задание. Убедитесь в том, что указанная функция Грина круга действительно обращается в нуль на границе круга.

²Это прямо следует из подготовительной теоремы Вейерштрасса. Элементарное доказательство см. в [?], теорема 6.2

5.4 Решение первой краевой задачи для уравнения Пуассона

Если внутри заземленной полости помещено несколько зарядов q_i в точки M_i , то потенциал поля вокруг них равен

$$u(M) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_i G(M, M_i) q_i,$$

если же заряд распределен по полости непрерывным образом, то сумма должна превратиться в интеграл, то есть

$$u(M) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} G(M, N) \rho(N) d\tau_N,$$

где интегрирование ведется по N . Но с другой стороны это поле удовлетворяет уравнениям Максвелла, в частности поток вектора $\vec{D} = -\varepsilon \nabla u$ через поверхность S равен заряду, заключенному в этой поверхности, поэтому

$$\Delta u = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Значит, решение первой краевой задачи (5.1) можно выразить при помощи функции Грина в виде интеграла:

$$u(M) = \int_{\Omega} G(M, N) f(N) d\tau_N.$$

Это утверждение можно доказать чисто математическим путем без отсылки к задачам электростатики как в трех, так и двумерном случаях³.

Весьма любопытно сравнить это выражение с (5.3): если в этой формуле поменять местами сумму и интеграл, тогда получается, что

$$u(M) = \int_{\Omega} f(N) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(M) \varphi_n(N) d\tau_N,$$

то есть

$$G(M, N) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(M) \varphi_n(N).$$

³См. [4], гл. IV, §4. На самом деле эта формула обобщается на любое число измерений.

Строго доказательство этой формулы представляет значительные трудности, поскольку функция Грина имеет особенность при $N = M$, и следовательно, этот ряд не может сходиться равномерно.⁴

Из этой формулы сразу видно одно важное свойство функции Грина:

$$G(M, N) = G(N, M).$$

Эту формулу можно доказать, минуя разложение в ряд.⁵ Таким образом, заряд q , помещенный в точку N , действует на заряд p , помещенный в точку M с силой, равной

$$\frac{pq}{\varepsilon} \nabla_M G(M, N) = \frac{pq}{\varepsilon} \nabla_N G(N, M),$$

то есть с какой заряд p действует на q .

5.5 Первая краевая задача для уравнения Лапласа

При помощи функции Грина можно решить и первую краевую задачу для уравнения Лапласа: классическое решение

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \quad (5.7)$$

можно представить в виде

$$u(M_0) = - \int_{\partial\Omega} f(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} d\sigma$$

Рассмотрим для определенности двумерный случай. Для любых гладких u и v справедлива *формула Грина*

$$\int_{\Omega'} (v\Delta u - u\Delta v) d\tau = \int_{\partial\Omega'} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma,$$

которая сразу следует из формулы Гаусса-Остроградского. Возьмем в качестве u решение задачи (5.7), в качестве v – функцию Грина $G(M, M_0)$, а

⁴У Э.Ч. ТИЧМАРША приведено весьма поучительное прямое доказательство этой формулы для прямоугольника.

⁵См. [4], гл. IV, §4, п. 1.

в качестве Ω' – область Ω за вычетом малого круга радиуса δ вокруг точки M_0 . Выкинуть окрестность точки M_0 необходимо, поскольку формулу Грина нельзя применять к функциям, имеющим особенность в области Ω' . Тогда в силу гармоничности обеих функций

$$-\int_{\partial\Omega} f \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma = \int_{|MM_0|=\delta} \left(G \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial G}{\partial r} \right) d\sigma = 0,$$

поскольку внешняя нормаль к области Ω' на окружности направлена к точке M_0 . В полярных координатах

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + w,$$

где w – функция, не имеющая в нуле особенности. Поэтому правая часть пред. равенства может быть представлена так сумма

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|MM_0|=\delta} \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{r} \right) d\sigma = \frac{\delta}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{r} \right) \Big|_{r=\delta}$$

и интеграла по окружности радиуса δ от ограниченной функции. Последний интеграл может быть сделан сколь угодно малым уменьшением δ . Функция $\delta \ln \delta$ тоже может быть сделана сколь угодно малой, поэтому в этой сумме не мал только член

$$\frac{\delta}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi u \frac{\partial}{\partial r} \ln r = \frac{\delta}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + \delta \cos \varphi, y_0 + \delta \sin \varphi) d\varphi,$$

который при $\delta \rightarrow 0$ стремится к $u(x_0, y_0)$. Поэтому

$$-\int_{\partial\Omega} f \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma = u(M_0),$$

что и тр.д.

Функция Грина для круга дается явной формулой (5.6), поэтому для решения задачи (5.7) в круге верно:

$$u(M_0) = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} \left(\ln \frac{1}{|MM_0|} - \ln \frac{a}{|OM_0|} \frac{1}{|MM_1|} \right) \Big|_{r=a} d\varphi.$$

Поскольку $|OM_0|$ не зависит от r , эту формулу можно записать короче

$$u(M_0) = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{|MM_1|}{|MM_0|} \Big|_{r=a} d\varphi.$$

Пусть r, φ – полярные координаты точки M , а r_0, φ_0 – полярные координаты точки M_0 , тогда полярные координаты сопряженной точки M_1 суть

$$r_1 = a^2 : r_0, \quad \varphi_1 = \varphi_0$$

и поэтому по теореме косинусов

$$|MM_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0), \quad |MM_1|^2 = r^2 + \frac{a^4}{r_0^2} - 2a^2 \frac{r}{r_0} \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Для вычисления

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{|MM_1|^2}{|MM_0|^2} \Big|_{r=a}$$

привлечем Giac:

- 1 restart; z:=r^2+r_0^2-2*r*r_0*cos(phi-phi_0);
- 2 r_1:=a^2/r_0; phi_1:=phi_0;
- 3 n:=r^2+r_1^2-2*r*r_1*cos(phi-phi_1);
- 4 simplify(subst(diff(ln(n/z)/2,r),r=a));

В итоге имеем

$$\frac{-a^2 + (r_0^2)}{a^3 - 2a^2 \cdot r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + ar_0^2},$$

поэтому

$$\frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi a} \frac{a^2 - r_0^2}{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

и в итоге

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r_0^2}{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} f(\varphi) d\varphi.$$

Эта формула, названная *интегралом Пуассона*, позволяет вычислить решение задачи (5.7) в любой внутренней точке M_0 .

Дом. задание. Используя функцию Грина для шара (5.4), получите для задачи (5.7) в шаре формулу, аналогичную интегралу Пуассона. Ср. [4], гл. IV, §4, п. 2.

Глава 6

Сферические функции

6.1 Особые точки линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрению дифференциального уравнения для сферических функций предположим небольшое замечание, касающееся вообще линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0,$$

и являющееся обобщением сказанного об уравнении Бесселя выше в разделе 4.4.1.

Если функции p и q аналитичны в точке $x = x_0$, то в силу теоремы Коши любое решение этого линейного дифференциального уравнения может быть представлено в виде линейной комбинации двух частных решений y_1 и y_2 , которые являются аналитическими функциями в точке $x = x_0$. Напр., любое решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

является линейной комбинацией двух целых функций $\sin x$ и $\cos x$ и поэтому, конечно, само тоже является целой функцией.

Если же коэффициенты p и q имеют особенности, то и частные решения должны иметь особенности. Для одного важного частного случая эту особенность описывает след. теорема Лазаруса Фукса: *в окрестности*

нуля дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a(x)}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{b(x)}{x^2} y = 0,$$

где a и b – аналитические функции

$$a = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots, \quad b = b_0 + b_1x + \dots$$

имеет решение вида

$$y = x^r (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots) \quad (c_0 \neq 0),$$

показатель r и коэффициенты c_n которого можно найти, подставив это выражение в уравнение. При этом одно такое решение, скажем y_1 , существует всегда, а второе – всякий раз, как в рекуррентных формулах для отыскания коэффициентов c_n знаменатели не обращаются в нуль.

Для отыскания второго частного решения нужно только вспомнить, что их определитель Вронского равен

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = \text{Const.} e^{-\int p(x) dx},$$

поэтому

$$\frac{d}{dx} \frac{y_2}{y_1} = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx},$$

и, зная p , оценить особенность y_2 совсем не трудно.

Теорема Фукса лежит в основе исследования сингулярных задач на собственные значения. Мы не станем приводить здесь ее доказательство, ограничившись ссылкой на Трикоми.¹

6.2 Задача о колебаниях сферы

Оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi}, \quad \Delta_{\theta\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

¹Ф. Трикоми. Дифференциальные уравнения. Гл. V, §46.

Поэтому при изучении задач в шаре или шаровом слое естественным образом появляются разложения по собственным функциям оператора $\Delta_{\theta\varphi}$. Задача на собственные значения формулируется так: требуется найти такие значения λ (собственные значения), при которых система

$$\begin{cases} \Delta_{\theta\varphi} u + \lambda u = 0, & 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi \\ u \text{ продолжается до гладкой } 2\pi\text{-периодической функции } \varphi \\ |u|_{\theta=0} < \infty, |u|_{\theta=\pi} < \infty \end{cases} \quad (6.1)$$

имеет нетривиальные решения (собственные функции). Собственные функции этой задачи называют *сферическими функциями*.²

По аналогии с мембраной, эту задачу можно рассматривать как простейшую математическую модель, описывающую продольные колебания тонкой сферической оболочки, напр., воздушного шара. При таком подходе становится очевидным, что задача сохраняет симметрию сферы, а введение сферической системы координат, имеющей избранную ось, эту симметрию скрывает.

6.3 Общие свойства собственных функций

Хотя задача (6.1) является сингулярной, поскольку при $\theta = 0$ и π коэффициент $\frac{1}{\sin \theta}$ в $\Delta_{\theta\varphi}$ обращается в бесконечность, доказательства простейших свойства собственных функций мембраны переносятся на нее без каких либо затруднений.

1. Все собственные значения (6.1) неотрицательны. В самом деле, умножая (6.1) на любую другую собственную функцию и интегрируя по сфере, получим

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \left(u \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{u}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \lambda u^2 \right) \sin \theta d\theta d\varphi = 0,$$

²Это определение несколько шире, чем данное в [1], где принимают за определение явное и нормированное выражение собственных функций через θ и φ .

или, интегрируя по частям,

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (-u_{\theta}^2 \sin \theta - \sin^{-1} \theta u_{\varphi}^2 + \lambda u^2) d\theta d\varphi = 0,$$

откуда видно, что λ есть отношение двух неотрицательных чисел.

2. Наименьшим собственным значением задачи (6.1) является $\lambda_1 = 0$, которому отвечает собственная функция $u_1 = 1$.

3. Собственные функции u и v , отвечающие различным собственным значениям λ и μ , ортогональны в том смысле, что

$$\int_S uv d\sigma = 0, \quad (6.2)$$

где S – поверхность единичной сферы. Для доказательства следует умножить (6.1) на v и проинтегрировать на сфере.

6.4 Собственные функции, зависящие только от θ

Полагая, что в (6.1) u не зависит от φ , имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{du}{d\theta} + \lambda u = 0, & 0 < \theta < \pi, \\ |u|_{\theta=0} < \infty, |u|_{\theta=\pi} < \infty \end{cases} \quad (6.3)$$

6.4.1 Аналитические свойства собственных функций

Сделаем очевидную замену переменной

$$x = \cos \theta, \quad dx = -\sin \theta d\theta,$$

преобразуем эту задачу так

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{du}{dx} + \lambda u = 0, & -1 < x < 1, \\ |u|_{x=\pm 1} < \infty. \end{cases} \quad (6.4)$$

1. Уравнение

$$u'' + \frac{2x}{x^2-1} u' + \frac{\lambda}{x^2-1} u = 0$$

имеет две особые точки $x = \pm 1$, причем обе подпадают под теорему Фукса.

1а. В окрестности точки $x = 1$ это уравнение имеет решение, которое дается рядом

$$u_1 = (x - 1)^r (c_0 + \dots);$$

подставляя это выражение в дифференциальное уравнение, находим

$$\left(r(r-1) + \frac{2x}{x+1} \Big|_{x=1} r + 0 \right) c_0 + \dots = 0,$$

откуда $r = 0$. Если u_2 – второе решение, то их определитель Вронского равен

$$u_1 u_2' - u_2 u_1' = \text{Const.} \exp \left(- \int \frac{2x dx}{x^2 - 1} \right) = \frac{C_1}{x^2 - 1},$$

откуда

$$\frac{d u_2}{d x u_1} = \frac{C_1}{u_1^2 (x^2 - 1)}$$

и при $u_1 = c_0 + \dots$ имеем

$$u_2(x) = u_1(x) \left(C_1 \int_0^x \frac{d\xi}{(\xi^2 - 1)(c_0 + \dots)} + C_2 \right),$$

то есть u_2 имеем при $x = 1$ логарифмическую особенность. Это означает, что *всякое решение задачи (6.4) не просто ограничено в точке $x = 1$, но обязательно является аналитической функцией.*

1б. Аналогично доказывается, что *всякое решение задачи (6.4) является аналитической функцией в точке $x = -1$.*

2. Поскольку на комплексной плоскости x коэффициенты рассматриваемого линейного дифференциального уравнения не имеют особых точек, *всякое решение (6.4) является целой функцией x* , то есть разлагается в сходящийся всюду ряд

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m.$$

3. Рассмотрим окрестность бесконечно удаленной точки $x = \infty$, сделав замену $\xi = \frac{1}{x}$. Имеем

$$\frac{du}{dx} = -\xi^2 \frac{du}{d\xi}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \xi^4 \frac{d^2u}{d\xi^2} + 2\xi^3 \frac{du}{d\xi}, \quad \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2\xi}{1 - \xi^2}$$

поэтому уравнение приобретает вид

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \left(\frac{2}{\xi} - \frac{2}{\xi(1-\xi^2)} \right) \frac{du}{d\xi} + \frac{\lambda}{\xi^2(\xi^2-1)}u = 0.$$

При $\xi = 0$ это уравнение опять имеет фуксову особую точку, поэтому одно из его решение имеет вид

$$u_1 = \xi^r c_0 + \dots = x^{-r} c_0 + \dots;$$

значит, это решение, равно как и второе решение

$$u_2(x) = u_1(x) \left(C_1 \int_0^x \frac{d\xi}{(\xi^2-1)u_1(\xi)} + C_2 \right),$$

имеют при $x \rightarrow \infty$ конечный или бесконечный предел. Следовательно, всякое решение задачи (6.4) будучи целой функцией x имеет конечный или бесконечный предел при $x \rightarrow \infty$. В силу теоремы Сохоцкого эта функция не может иметь в точке $\xi = 0$ существенную особенность, то есть ряд Лорана

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \xi^{-m}$$

на самом деле содержит конечное число членов. Это означает, что *всякое решение задачи (6.4) является полиномом.*

4. Обозначив как n степень этого полинома, имеем

$$u = x^n c_0 + c_1 x^{n-1} + \dots = \xi^{-n}(c_0 + c_1 \xi + \dots);$$

подставив это выражение в дифференциальное уравнение, получим

$$[(-n)(-n-1) + 0(-n) + \lambda]c_0 + \dots = 0,$$

т.е. всякое решение задачи (6.4) является полиномом, а отвечающее ему *собственное значение выражается через порядок n полинома как $\lambda = n(n+1)$.*

5. *Каждое собственное значение однократно.* В самом деле, если бы одному собственному значению $\lambda = n(n+1)$ отвечают две собственные

функции, то обе они являются полиномами одной степени n , но тогда их можно составить линейную комбинацию, степень которой меньше n , и которая, следовательно, не может быть собственной функцией, что невозможно. Обозначим определенный с точностью до мультипликативной константы полином как $P_n(x)$.

6. Полиномы $\{P_n\}$ ортогональны в том смысле, что

$$\int P_n(x)P_m(x)dx = 0 \quad (n \neq m).$$

В самом деле, умножим

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP_n}{dx} + n(n+1)P_n = 0$$

на P_m и проинтегрируем по отрезку $-1 < x < 1$, получим

$$\int_{-1}^1 P'_m P'_n (1-x^2) dx = n(n+1) \int_{-1}^1 P_n P_m dx;$$

левая часть симметрична относительно перестановки n и m , а правая – нет, следовательно,

$$\int_{-1}^1 P_n P_m dx = 0.$$

7. Имеется весьма простой способ построения системы ортогональных полиномов, изложенный в курсе линейной алгебры в абстрактной форме как метод ортогонализации Грамма-Шмидта.

7а. Положим

$$P_0 = 1, \quad P_1 = x + a$$

и подберем a так, чтобы

$$\int_{-1}^1 P_0 P_1 dx = 0.$$

Подставляя P_0 и P_1 в это условие, получим

$$\int_{-1}^1 x dx + a \int_{-1}^1 1 dx = 0$$

то есть $2a = 0$, откуда $a = 0$ и $P_1 = x$. Этот полином удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP_1}{dx} + 1(1+1)P_1 = 0$$

а, следовательно, и задаче (6.4).

7b. Далее, положим

$$P_2 = x^2 + ax + b,$$

где a и b определяются из условий

$$\left\{ \int_{-1}^1 P_0 P_2 dx = 0, \quad \int_{-1}^1 P_1 P_2 dx = 0. \right.$$

или

$$\left\{ \frac{2}{3} + 2b = 0, \quad 0 + \frac{2}{3}a = 0, \right.$$

откуда

$$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Этот полином удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP_2}{dx} + 2(2+1)P_2 = 0$$

а, следовательно, и задаче (6.4).

6.4.2 Ортогональные полиномы

Вообще, если имеется система полиномов $\{P_0 = 1, P_1, P_2, \dots\}$ степеней $0, 1, 2, \dots$ и верно

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)\rho(x)dx = 0 \quad (n \neq m),$$

то говорят, что $\{P_n\}$ – система полиномов, ортогональных на $[a, b]$ с весом ρ , или, короче, что P_n – ортогональные полиномы. В самом общем случае, такие полиномы обладают рядом замечательных свойств:

1. Степень x^n всегда можно представить в виде линейной комбинации n первых ортогональных полиномов системы.

2. Произвольную функцию, непрерывную на отрезке $a < x < b$, можно с любой точностью аппроксимировать линейной комбинацией ортогональных полиномов.

3. Полином P_n имеет на отрезке $a < x < b$ ровно n простых нулей.

Первое очевидно по построению, второе есть другая формулировка теоремы Вейерштрасса об аппроксимации полиномами, третье же не трудно доказать от противного. Именно, пусть P_n меняет знак на отрезке $a < x < b$ в $k < n$ точках, скажем, x_1, \dots, x_k , тогда его можно представить в виде

$$P_n = (x - x_1) \dots (x - x_k)q(x), \quad q \geq 0 \text{ при } a < x < b.$$

Поэтому

$$\int_a^b (x - x_1) \dots (x - x_k) P_n(x) \rho dx = \int_a^b (x - x_1)^2 \dots (x - x_k)^2 q(x) dx > 0.$$

Но с другой стороны $(x - x_1) \dots (x - x_k)$ – полином степени $k < n$, поэтому его можно представить в виде линейной комбинации первых k полиномов системы:

$$(x - x_1) \dots (x - x_k) = c_0 P_0(x) + \dots + c_k P_k(x)$$

и значит

$$\int_a^b (x - x_1) \dots (x - x_k) P_n(x) \rho dx = c_0 (P_0, P_n) + \dots + c_k (P_k, P_n) = 0,$$

что противоречит пред.

6.4.3 Полиномы Лежандра

В разделе 6.4.1 мы убедились в том, что собственные функции задачи (6.4) составляют систему полиномов, ортогональных на отрезке $-1 < x < 1$ с весом $\rho = 1$.

Попытаемся написать общее выражение для таких полиномов. Нам нужно придумать способ построения полинома P_n степени n , ортогонального

всем степеням P_0, \dots, P_{n-1} или, в силу свойства 1, всем $1, x, \dots, x^{n-1}$:

$$\int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx = 0 \quad (m = 0, 1, \dots, n-1).$$

Вспомним, что по формуле интегрирования по частям для любых функций f, g верно

$$\int_{-1}^1 g \frac{d^n f}{dx^n} dx = (-1)^n \int_{-1}^1 f \frac{d^n g}{dx^n} dx + g \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} g}{dx^{n-1}} f \Big|_{x=-1}^1.$$

При $g = x^m$ и $m < n$ интеграл

$$\int_{-1}^1 f \frac{d^n g}{dx^n} dx = 0,$$

и остаются только подстановки при $x = -1$ и $x = 1$. Таким образом, мы добьемся нашей цели, если возьмем в качестве f полином степени $2n$, обращающийся при $x = -1$ и $x = 1$ в нуль вместе со своими производными до $(n-1)$ -го порядка, то есть

$$f = C(x-1)^n(x+1)^n = C(x^2-1)^n.$$

Отсюда сразу получается формула

$$P_n(x) = C_n \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n.$$

Мультипликативная константа C_n никак не влияет на ортогональность полиномов и может быть взята любой. Выше мы нормировали P_n так, чтобы коэффициент при x^n был равен 1, однако исторически сложилось, что *полиномами Лежандра* называют

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n,$$

а саму эту формулу – *формулой Родрига*.

Итог таков: *множество собственных значений и собственных задачи (6.4) устроено так*

$$\lambda = n(n+1), \quad u = P_n(x) \equiv \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Соответственно, все собственные функции задачи (6.3), зависящие только от θ , исчерпываются функциями $P_n(\cos \theta)$. Любопытно отметить еще, что в силу 3-го свойства ортогональных полиномов функция $P_n(\cos \theta)$ имеет ровно n узловых линий на сфере, именно, n широт, θ которых определяется из уравнения

$$P_n(\cos \theta) = 0.$$

Замечание. – Обычно, надо полагать в целях сокращения изложения, начинают изложение теории сферических функций со свойств ортогональных полиномов. Затем внезапно замечают, что выражение

$$Q_n = \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}$$

является полиномом степени n , причем

$$\int_{-1}^1 x^m Q_n(x) dx = - \int_{-1}^1 m x^{m-1} (1-x^2) P_n'(x) dx = \int_{-1}^1 P_n \frac{d}{dx} m x^{m-1} (1-x^2) dx = 0,$$

поскольку производная $m x^{m-1} (1-x^2)$ является полиномом степени меньшей n и поэтому $\{Q_n\}$ – тоже система ортогональных полиномов, а значит

$$Q_n(x) : P_n(x) = \text{const},$$

откуда получается, что P_n – собственные функции (6.4).

6.5 Сферические функции

Наименьшему собственному значению $\lambda_1 = 0$ отвечает единственная собственная функция $u = 1$, при всевозможных вращениях сферы эта функция не меняется.

Второму собственному значению $\lambda_2 = 1(1+1) = 2$ отвечает собственная функция

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta = z.$$

Ее единственная узловая линия – экватор сферы, переходя через который собственная функция меняет знак. При возбуждении такого собственного

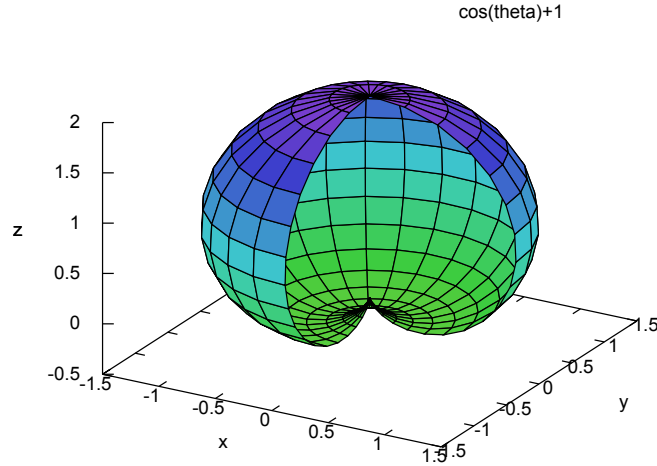


Рис. 6.1: Мгновенный профиль собственного колебания сферы, отвечающего собственному значению $\lambda = 2$.

колебания сфера делится на два полушария, которые колеблются в противофазе. Функция $u(\theta, \varphi)$ дает отклонение точки единичной сферы в направлении нормали, мгновенный профиль такого колебания описывается как $r = 1 + u \sin \sqrt{2}t$ (см. рис. 6.1).

Задача о собственных колебаниях сферы не имеет особой оси, для любой оси можно указать такую моду. В частности, поскольку для сферы декартовы координаты x, y и z равнозначны, этому же собственному значению должны отвечать еще две собственные функции –

$$x = \cos \varphi \sin \theta \quad \text{и} \quad y = \sin \varphi \sin \theta.$$

Поэтому кратность собственного значения $\lambda_2 = 1(1 + 1)$ равна 3-м. Поскольку преобразование поворота является линейным преобразованием в декартовой системе координат, всякая собственная функция, полученная из $u = z$, может быть представлена как линейная комбинация этих трех собственных функций. Принято обозначить их как

$$Y_1^{(0)} = \cos \theta, \quad Y_1^{(1)} = \sin \theta \cos \varphi, \quad Y_1^{(-1)} = \sin \theta \sin \varphi$$

и называть сферическими функциями. Впрочем для решения большинства

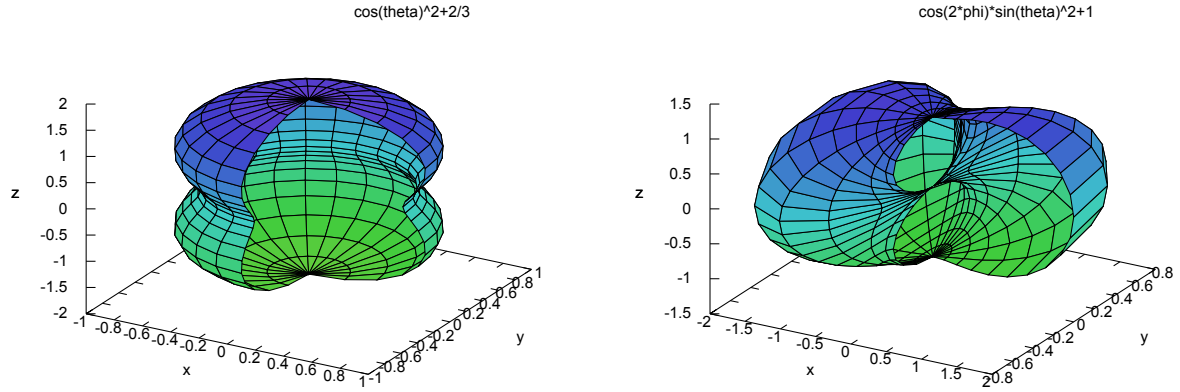


Рис. 6.2: Мгновенные профили двух различных собственных колебаний сферы, отвечающих собственному значению $\lambda = 6$.

задач существенно лишь то, что

$$\Delta_{\theta\varphi} Y_1^{(m)} = -1(1+1)Y_1^{(m)}.$$

Третьему собственному значению $\lambda_3 = 2(2+1) = 6$ отвечает собственная функция

$$2P_2(\cos \theta) = \cos^2 \theta - \frac{1}{3} = z^2 - \frac{1}{3}.$$

Она имеет две узловые линии

$$\theta = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.95[\text{рад.}],$$

поэтому при возбуждении этой собственной моды сфера делится на три части, области возле полюсов и вокруг экватора колеблются в противофазе. Повороты сферы позволяют получить из этой функции опять 2-х параметрическое семейство собственных функций, каждая из которых имеет избранную ось. Однако теперь ими не исчерпываются все собственные функции, отвечающие этому собственному значению, то есть кратность собственного значения $\lambda = 6$ строго больше 3-х.

Именно, в силу равноправия декартовых координат собственными функциями будут также

$$x^2 - \frac{1}{3}, y^2 - \frac{1}{3}$$

а значит и их разность

$$x^2 - y^2 = \cos^2 \varphi \sin^2 \theta - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta = \sin^2 \theta \cos 2\varphi,$$

узловыми линиями которой будут два больших круга, по которым сферу пересекают плоскости $x = y$ и $x = -y$.³ При возбуждении этой моды сфера делится на четыре равные части, причем соседние части колеблются в противофазе (см. рис. 6.2).

Произвольные повороты могут перевести z^2 только в однородную квадратичную функцию переменных x, y, z , поэтому $z^2 - \frac{1}{3}$ может перейти только в функцию вида

$$c_1 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) + c_2 \left(y^2 - \frac{1}{3} \right) + c_3 \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) + c_4 xy + c_5 xz + c_6 yz + c_7$$

Но если повернуть систему координат на $\pi/4$ вокруг оси Oz собственная функция $x^2 - y^2$ перейдет в xy , поэтому каждое слагаемое, кроме последнего, само по себе является собственной функцией. Следовательно, кратность $\lambda = 6$ равна 5-ти и собственные функции, получающиеся путем поворотов из $P_2(\cos \theta)$, можно представить в виде линейной комбинации 5-ти собственных функций этой задачи. Традиционно в качестве базиса берут

$$\begin{aligned} Y_2^{(0)} &= P_2(\cos \theta), \\ Y_2^{(1)} &= xz = \sin \theta \cos \theta \cos \varphi, \quad Y_2^{(-1)} = yz = \sin \theta \cos \theta \sin \varphi, \\ Y_2^{(2)} &= x^2 - y^2 = \sin^2 \theta \cos 2\varphi, \quad Y_2^{(-2)} = 2xy = \sin^2 \theta \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

При такой записи хорошо видно, что все собственные функции можно искать в виде произведения функции от θ на функцию от φ , то есть применять метод разделения переменных.

Для $n = 3$ можно повторить все сказанное выше, новым оказывается появление собственной функции

$$u = 2xyz = 2 \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta \cos \theta = \sin^2 \theta \cos \theta \sin 2\varphi,$$

³Сложение этих функций не даст новой функции:

$$x^2 - \frac{1}{3} + y^2 - \frac{1}{3} = 1 - z^2 - \frac{2}{3} = - \left(z^2 - \frac{1}{3} \right).$$

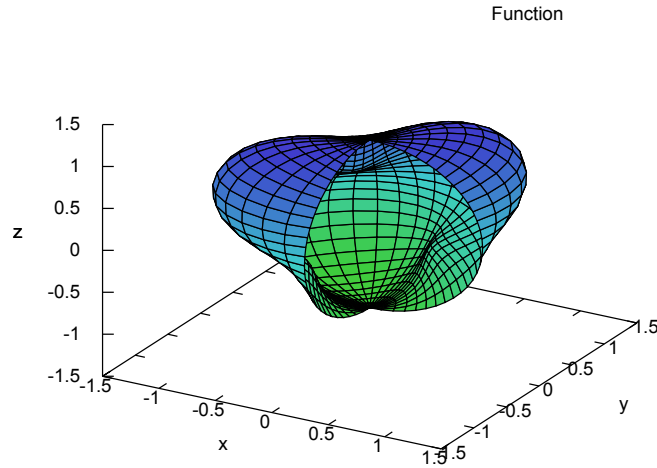


Рис. 6.3: Мгновенный профиль собственного колебания сферы, имеющий форму тетраэдра.

которая обладает несколькими осями симметрии. При возбуждении этой моды сфера деформируется в тетраэдр, который периодически переходит в двойственный тетраэдр и обратно (см. рис 6.3).

Продолжая так далее, можно убедиться в том, что собственное значение $\lambda = n(n + 1)$ имеет кратность $2n + 1$ и всякую отвечающую ему функцию можно представить в виде линейной комбинации сферических функций

$$\sum_{m=-n}^n c_m Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$$

Замечание. – Выше мы допустили одну вольность. То, что при всевозможных поворотах $P_n(\cos \theta)$ дает $2n + 1$ линейно независимые функции, означает, что кратность $\lambda = n(n + 1)$ не меньше $2n + 1$, но вообще говоря, могут быть другие собственные функции, которые не получаются из осесимметричных никакими поворотами. Исключить эту возможность можно лишь доказав теорему Стеклова для системы сферических функций. См. [1], гл. IV, §5.

Литература

Основная

- [1] СВЕШНИКОВ А.Г., БОГОЛЮБОВ А.Н., КРАВЦОВ В.В. Лекции по математической физики. Подойдет любое издание, напр., М.: «Наука», 2004 г.
- [2] БОГОЛЮБОВ А.Н., КРАВЦОВ В.В. Задачи по математической физики. Изд-во МГУ, 1994.

Дополнительная

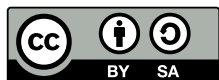
- [3] КУРАНТ Р., ГИЛЬБЕРТ Д. Методы математической физики. Т. 1, М., 1933; Т. 2, М., 1945.
- [4] ТИХОНОВ А.Н., САМАРСКИЙ А.А. Уравнения математической физики. Подойдет любое издание, напр., 6-е изд. М., Изд-во МГУ, 1999.
- [5] ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

ББК 22.311

УДК 517.9

Малых М.Д. Уравнения математической физики. – М., 2012. – 177 с.

Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 020300 «Химия, физика и механика материалов».



© 2012 г., Михаил Дмитриевич Малых.

Текст доступен на условиях лицензии Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Свежая версия доступна на сайте <http://mmpn.narod.ru/>.

Фиг. 1.1 взята из кн. Bibliothek allgemeinen und praktischen Wissens für Militäranwärter. Band III. Deutsches Verlaghaus Bong & Co.: Berlin-Leipzig-Wien-Stuttgart, 1905.