# ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

Краткий курс,
основанный на первых главах книги Ф. Штуммеля «Граничные задачи и задачи на собственные значения в пространствах Соболева» (1969).

## Содержание

**1 Ограниченные билинейные формы в гильбертовом пространстве 1**

1.1 Гильбертово пространство . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

1.2 Ограниченные билинейные формы . . . . . . . . . . . . . . . . 4

1.3 Линейные подпространства и ортогональность . . . . . . . . 6

1.4 Ограниченные линейные функционалы и операторы . . . . . 9

**2 Вполне непрерывные билинейные формы и операторы 12**

2.1 Слабая сходимость . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

2.2 Вполне непрерывные операторы . . . . . . . . . . . . . . . 17

2.3 Вполне непрерывные билинейные формы. . . . . . . . . . . . 20

2.4 Критерий полной непрерывности билинейной формы и неравенство Эрлинга . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22

# 1 Ограниченные билинейные формы в гильбертовом пространстве

## 1.1 Гильбертово пространство

Пусть $\mathfrak{H}$ — векторное (линейное) пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Под *билинейной формой* $b$ мы понимаем отображение, которое каждой паре $u, v \in \mathfrak{H}$ ставит в соответствие некоторое комплексное число

$b(u,v)$, причем это отображение обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} b(\alpha u+\beta v,w) &= \alpha b(u,w)+\beta b(v,w),\\ b(u,\alpha v+\beta w) &= \overline{\alpha} b(u,w)+\overline{\beta} b(v,w) \end{aligned} \tag{1}$$

для любых $u,v,w\in\mathfrak{H}$ и любых комплексных чисел $\alpha$ и $\beta$. Для любой билинейной формы $b$ мы определим соответствующую *квадратичную форму*, положив

$$b(u)=b(u,u),\quad u\in\mathfrak{H}. \tag{2}$$

Билинейная форма называется симметричной, если

$$b(u,v)=\overline{b(v,u)},\quad u,v\in\mathfrak{H}. \tag{3}$$

В этом случае соответствующая квадратичная форма принимает только вещественные значения. Симметричная билинейная форма $b$ и соответствующая вещественнозначная квадратичная форма $b$ называются положительно определенными при выполнении условия:

$$b(u,u)=b(u)\geq 0,\quad u\in\mathfrak{H}, \tag{4}$$

и строго положительно определенными, если $b$ — положительно определенная и $b(u,u)=b(u)=0$ только в случае $u=0$.

Пусть $(.,.)$ — положительно определенная билинейная форма. Обозначим через $||.||$ квадратный корень из соответствующей положительной квадратичной формы:

$$||u||=(u,u)^{1/2},\quad u\in\mathfrak{H},$$

тогда справедливо неравенство Шварца:

$$|(u,v)|\leq ||u||||v||,\quad u,v\in\mathfrak{H}, \tag{5}$$

и неравенство треугольника:

$$||u+v||\leq ||u||+||v||,\quad u,v\in\mathfrak{H}. \tag{6}$$

Поэтому $||.||$ задает полунорму на $\mathfrak{H}$. Если симметричная форма $(.,.)$ строго положительна, то ее называют *скалярным произведением*. В этом случае

$(u,u) = ||u||^2$ равно нулю тогда и только тогда, когда $u = 0$, поэтому $||.||$ задает *норму* на $\mathfrak{H}$.

Векторное пространство $\mathfrak{H}$, на котором задано скалярное произведение, называют *предгильбертовым пространством*. Предгильбертово пространство называют полным, если для любой последовательности Коши элементов $u_j \in \mathfrak{H}$, $j = 1, 2, \dots,$

$$||u_j - u_k|| \to 0 \quad (j, k \to \infty) \tag{7}$$

найдется такой элемент $u \in \mathfrak{H}$, что

$$u_j \to u : \quad ||u_j - u|| \to 0 \quad (j \to \infty) \tag{8}$$

Полное предгильбертово прострнство называют также *гильбертовым простарнтсвом*.

Любое предгильбертово пространство можно превратить в гильбертово, добавив к его элементам пределы всемозможных последовтальностей Коши. Этот процес называют *замыканием* (пополнением) предгильбертова пространства и состоит он в следующем.

Вместо заданного предгильбертвова пространства $\mathfrak{V}$ рассмотрим векторное пространство $\mathfrak{H}$, элементами которого являются последовательности Коши $u = (u_1,\ u_2,\ \dots)$ пространства $\mathfrak{V}$, причем элементы $u, v \in \mathfrak{H}$ считаются равными, если последовательности $||u_n - v_n|| \to 0$. Скалярное произведение на $\mathfrak{H}$ введем как предел

$$(u,v)_{\mathfrak{H}} = \lim_{n\to\infty} (u_n, v_n),$$

и тогда

$$||u||_{\mathfrak{H}} = \lim_{n\to\infty} ||u_n||$$

**Теорема 1.** Пространство $\mathfrak{H}$ является гильбертовым.

*Доказательство.* Пусть $\{u^{(n)} = (u_1^{(n)},\ u_2^{(n)}, \dots)\}$ — произвольная последовательность Коши элементов $\mathfrak{H}$. Зададимся произольным числом $\varepsilon > 0$. По условию найдется такое $N(\varepsilon)$, что при любых $n, m > N$ верно

$$||u^{(m)} - u^{(n)}|| = \lim_{k=\infty} ||u_k^{(m)} - u_k^{(n)}|| < \varepsilon/2$$

а значит, и такое $K(\varepsilon)$, что при $k > K$

$$||u_k^{(m)} - u_k^{(n)}|| < \varepsilon$$

В частности при $n, k > M = \max(K, N)$ и $m = k$ имеем

$$||u_k^{(k)} - u_k^{(n)}|| < \varepsilon \tag{9}$$

Поскольку для произольного $\varepsilon$ нашлось такое $M$, что при любых $n, m > M$ верно

$$||u_m^{(m)} - u_n^{(n)}|| \leq ||u_m^{(m)} - u_m^{(n)}|| + ||u_n^{(n)} - u_m^{(n)}|| < 2\varepsilon,$$

последоватльность $\{u_1^{(1)},\, u_2^{(2)}, \dots\}$ элементов $\mathfrak{V}$ является последовательностью Коши, а значит

$$u = \{u_1^{(1)},\, u_2^{(2)}, \dots\} \in \mathfrak{H}.$$

В силу неравенса (9) при любом заданном $\varepsilon$

$$||u - u^{(n)}|| = \lim_{k=\infty} ||u_k^{(k)} - u_k^{(n)}|| < \varepsilon$$

при $n > M(\varepsilon)$, то есть $u$ — предел последоватльности $u^{(n)}$. Значит, любая последовательность Коши в $\mathfrak{H}$ имеет предел, и $\mathfrak{H}$, стало быть, — гильбертво.

□

Пространство $\mathfrak{V}'$ всех последовательностей, сходящихся к элементам $\mathfrak{V}$, вложено в пространство $\mathfrak{H}$. Ясно, что между элементами $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{V}'$ существует взаимно однозначное соответствие, поэтому обычно, допуская некоторую вольность, их отождествляют. Тогда можно сказать, что векторное пространство $\mathfrak{V}$ является подмножеством в гильбертовом простраснстве $\mathfrak{H}$ и любой элемент $\mathfrak{H}$ является пределом некоторой последоватльности элементов $\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}$, поэтому $\mathfrak{H}$ — замыкание $\mathfrak{V}$.

## 1.2 Ограниченные билинейные формы

Пусть $\mathfrak{H}$ — предгильбертово пространство и $b$ билинейная форма на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Тогда $b$ называют *ограниченной билинейной формой*, если существует такое число $\beta > 0$, что

$$|b(u,v)| \leq \beta ||u|| ||v||, \quad u,v \in \mathfrak{H}. \tag{10}$$

Аналогично квадратичную форму, соответствующую билинейной форме $b$, называют ограниченной, если существует такое число $\beta' > 0$, что

$$|b(u)| \leq \beta' ||u||^2, \quad u \in \mathfrak{H}. \tag{11}$$

Наименьшее число $\beta$, для которого справедливо неравенство (10), называют нормой $||b||$ билинейной формы $b$ на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Для нормы $||b||$ справедливо представление:

$$||b|| = \sup_{u,v\in\mathfrak{H},\, u\neq 0, v\neq 0} \frac{|b(u,v)|}{||u|| ||v||} = \sup_{u,v\in\mathfrak{H},\, ||u||=||v||=1} |b(u,v)|. \tag{12}$$

Аналогично наименьшее число $\beta'$, для которого справедливо неравенство (11), называют нормой $||b||_1$ квадратичной формы и мы имеем

$$||b||_1 = \sup_{u\in\mathfrak{H},\, u\neq 0} \frac{|b(u)|}{||u||^2} = \sup_{u\in\mathfrak{H},\, ||u||=1} |b(u)|. \tag{13}$$

На векторных пространствах над полем комплексных чисел выполняется следующее важное соотношение между билинейной формой и соответствующей ей квадратичной формой:

$$b(u,v) = \frac{1}{4}\left\{b(u+v) - b(u-v) + ib(u+iv) - ib(u-iv)\right\} \tag{14}$$

при $u, v \in \mathfrak{H}$. Поэтому на предгильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ можно доказать следующее предложение.

**Теорема 2.** Билинейная форма $b$ на $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничена соответствующая квадратичная форма, и в этом случае верно

$$||b||_1 \leq ||b|| \leq 2||b||_1. \tag{15}$$

*Доказательство.* (i) Пусть билинейная форма $b$ на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ ограничена, тогда

$$|b(u,v)| \leq ||b|| ||u|| ||v||, \quad u,v \in \mathfrak{H}.$$

Поэтому в силу (13) ограничена и соответствующая квадратичная форма, причем $||b||_1 \le ||b||$.

(ii) Пусть, наоборот, ограничена соответствующая квадратичная форма, тогда

$$b(u) \le ||b||_1 ||u||^2, \quad u \in \mathfrak{H}.$$

Из представления (14) имеем

$$|b(u,v)| \le \frac{||b||_1}{4} \left\{ ||u+v||^2 + ||u-v||^2 + ||u+iv||^2 + ||u-iv||^2 \right\}, \quad u,v \in \mathfrak{H}.$$

или в силу неравенства треугольника

$$|b(u,v)| \le 2||b||_1, \quad u,v \in \mathfrak{H},\ ||u|| = ||v|| = 1.$$

Поэтому, в силу (12) существует норма $||b||$, так, что билинейная форма ограничена, и эта норма удовлетворяет неравенству $||b|| \le 2||b||_1$. □

## 1.3 Линейные подпространства и ортогональность

Два элемента гильбертова пространства называют ортогональными, если верно

$$u \perp v \quad \Longleftrightarrow (u,v) = 0. \tag{16}$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — линейное подпространство $\mathfrak{H}$, тогда $u$ называют ортогональным к $\mathfrak{M}$, если

$$u \perp M \quad \Longleftrightarrow (u,v) = 0, \quad v \in \mathfrak{M}. \tag{17}$$

Далее, обозначим как $\mathfrak{M}^\perp$ ортогональное дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{H}$, то есть положим

$$\mathfrak{M}^\perp = \{u \in \mathfrak{H} :\ u \perp \mathfrak{M}\} = \{u \in \mathfrak{H} :\ (u,v) = 0,\ v \in \mathfrak{M}\} \tag{18}$$

Линейное подпространство $\mathfrak{M}$ гильбертова подпространства $\mathfrak{H}$ называют замкнутым, если для любой сходящейся последовательности элементов их $\mathfrak{M}$ верно

$$u_j \in \mathfrak{M},\ u_j \to u\ (j \to \infty) \quad \Rightarrow u \in \mathfrak{M}. \tag{19}$$

Напр., для любого линейного подпространства $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ его ортогональное дополнение $\mathfrak{M}^{\perp}$ замкнуто. В гильбертовом пространстве имеет место следующая важна теорема об ортогональной проекции на подпространство.

**Теорема 3.** Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathfrak{H}$. Тогда любой элемент $u \in \mathfrak{H}$ можно представить в виде:

$$u = v + w, \quad v \in \mathfrak{M},\ w \in \mathfrak{M}^{\perp}, \tag{20}$$

и притом только одним единственным способом.

*Доказательство.* (i) Пусть

$$\alpha = \inf_{v \in \mathfrak{M}} ||u - v||,$$

тогда существует последовательность элементов $v_j \in \mathfrak{M},\ j = 1, 2, \dots$ с

$$\alpha_j = ||u - v_j|| \to \alpha \quad (j \to \infty). \tag{21}$$

В силу $\alpha_j \geq \alpha$ и т.н. тождества параллелограмма сходится

$$||v_j - v_k||^2 = 2||u - v_j||^2 + 2||u - v_k||^2 - 4||u - \frac{1}{2}(v_j + v_k)||^2 \leq$$
$$\leq 2\alpha_j + 2\alpha_k - 4\alpha^2 \to 0 \quad (j, k \to \infty)$$

Таким образом, последовательность $\{v_j\}$ сходится и притом к некоторому элементу $v \in \mathfrak{M}$. Отсюда и из (21) следует, что

$$\alpha = ||u - v|| = \inf_{v' \in \mathfrak{M}} ||u - v'||. \tag{22}$$

(ii) Положим $w = u - v$. Тогда в силу (22)

$$||w|| \leq ||w + v'||, \quad v' \in \mathfrak{M}.$$

Следовательно, для любого элемента $h \in \mathfrak{M}$ и $\alpha = -\frac{(w,h)}{||h||^2}$ верно

$$\begin{aligned} 0 \leq ||w + \alpha h||^2 - ||w||^2 &= |\alpha|^2 ||h||^2 + 2\mathrm{Re}\overline{\alpha}(w, h) \\ &= -\frac{|(w, h)|^2}{||h||^2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Поэтому должно быть $(w,h)=0$ при любом $h\in\mathfrak{M}$, т.е. $w\in\mathfrak{M}^\perp$.

(iii) Остается доказать, что представление (20) единственно. Допустим, против этого, что существует два представления вида

$$u=v+w=v'+w',\quad v,v'\in\mathfrak{M},\ w,w'\in\mathfrak{M}^\perp,$$

тогда имеем

$$v-v'=w'-w\in\mathfrak{M}\cap\mathfrak{M}^\perp=0$$

или $v=v',\ w=w'$. □

Следствие этой теоремы таково:

**Теорема 4.** Пусть $\mathfrak{M}$ — линейное подпространство $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{M}$ — замыкание $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{H}$, тогда верно

$$\mathfrak{M}\subseteq\overline{\mathfrak{M}}=\mathfrak{M}^{\perp\perp}.$$

*Доказательство.* (i) Для любого подпространства $\mathfrak{M}$ его ортогональное дополнение $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}^\perp$ замкнуто. Поэтому любой элемент $u\in\mathfrak{M}$ можно однозначно разложить в

$$u=v+w,\quad v\in\mathfrak{N}=\mathfrak{M}^\perp,w\in\mathfrak{N}^\perp=\mathfrak{M}^{\perp\perp},\tag{24}$$

с $v\perp w$. Для $u\in\mathfrak{M}$ также верно $u\perp v\in\mathfrak{N}=\mathfrak{M}^\perp$, так, что, умножая (24) на $v$, получим

$$0=(u,v)=||v||^2+(w,v)=||v||^2,$$

или $v=0$ Следовательно, $u=w\in\mathfrak{N}^\perp=\mathfrak{M}^{\perp\perp}$, что означает $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}^{\perp\perp}$.

(ii) Если $\mathfrak{M}$ — замкнутое, то любой элемент $u\in\mathfrak{H}$ можно записать в виде

$$u=v_1+w_1=v_2+w_2,\quad v_1\in\mathfrak{M},\ w_1\in\mathfrak{M}^\perp,\ v_2\in\mathfrak{N},\ w_2\in\mathfrak{N}^\perp.$$

Элемент

$$w_1-v_2=w_2-v_1\tag{25}$$

принадлежит $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}^\perp$, ортогонален $v_1\in\mathfrak{M}$ и ортогонален $w_2\in\mathfrak{N}^\perp$, то есть ортогонален сам себе. Значит, верно

$$w_1=v_2,\quad v_1=w_2\tag{26}$$

Если $u \in \mathfrak{M}^{\perp\perp} = \mathfrak{N}^{\perp}$, то тогда $v_2 = 0$, и в силу (26) $w_1 = 0$, то есть $u = v_1$ лежит в $\mathfrak{M}$. Итак, $\mathfrak{M}^{\perp\perp} \subseteq \mathfrak{M}$, что в силу (i) дает $\mathfrak{M}^{\perp\perp} = \mathfrak{M}$.

(iii) Для линейного подпространства $\mathfrak{M}$ пространства $\mathfrak{H}$ верны включения:

$$\mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}, \quad \mathfrak{M}^{\perp} = \overline{\mathfrak{M}}^{\perp}. \tag{27}$$

В силу (ii) имеем $\mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}}^{\perp\perp} = \mathfrak{M}^{\perp\perp}$. □

## 1.4 Ограниченные линейные функционалы и операторы

Под линейным функционалом $l$ на гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ понимают отображение $l$, которое каждому элементу $u \in \mathfrak{H}$ ставит в соответствие некоторое комплексное число $l(u)$, причем

$$l(\alpha u + \beta v) = \alpha l(u) + \beta l(v), \quad u, v \in \mathfrak{H}, \tag{28}$$

для любых двух комплексных чисел $\alpha$, $\beta$. Линейный функционал $l$ называют ограниченным, если существует такое число $\alpha \geq 0$, что

$$|l(u)| \leq \alpha ||u||, \quad u \in \mathfrak{H}. \tag{29}$$

Множество ограниченных линейных функционалов на $\mathfrak{H}$ обозначают как $\mathfrak{H}^*$. Любой элемент $w \in \mathfrak{H}$ задает некоторый функционал из $\mathfrak{H}^*$ по формуле

$$l(u) = (u, w), \quad u \in \mathfrak{H}.$$

Обратное утверждает фундаментальная теорема о представлении ограниченного функционала Фреше-Рисса (Fréche-Riesz):

**Теорема 5.** Для любого ограниченного функционала $l$ на $\mathfrak{H}$ найдется один единственный элемент $w \in \mathfrak{H}$, такой, что

$$l(u) = (u, w), \quad u \in \mathfrak{H} \tag{30}$$

*Доказательство.* Пусть

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{H} : l(u) = 0\},$$

тогда $\mathfrak{M}$ — замкнутое линейное подпространство $\mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$, то можно взять $w = 0$. Если $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{H}$, то должен существовать элемент $u_0$ с $l(u_0) \neq 0$ и мы, не ограничивая общности можем считать, что

$$l(u_0) = 1. \tag{31}$$

Этот элемент $u_0$ в силу теоремы (3) может быть представлен в виде

$$u_0 = v_0 + w_0, \quad v_0 \in \mathfrak{M}, w_0 \in \mathfrak{M}^{\perp}.$$

Отсюда следует в частности, что

$$(u_0, w_0) = ||w_0||^2 \neq 0, \tag{32}$$

так как в случае $w_0 = 0$ также и $u_0 \in \mathfrak{M}$ и, значит, $l(u_0) = 0$, что в силу (31) невозможно. Пусть теперь $u$ — произвольный элемент $\mathfrak{H}$, тогда

$$v = u - l(u)u_0 \in \mathfrak{M},$$

так как $l(v) = l(u) - l(u)l(u_0) = 0$. Поэтому мы имеем

$$0 = (v, w_0) = (u, w_0) - l(u)(u_0, w_0),$$

или, в силу (32)

$$l(u) = \frac{(u, w_0)}{||w_0||^2}$$

для любого $u \in \mathfrak{H}$. Но это и есть искомое представление с $w = \frac{1}{||w_0||^2} w_0$. Элемент $w$ в (30) определен однозначно, так как из $(u, w) = 0$ при всех $u \in \mathfrak{H}$ следует $w = 0$. □

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(.,.)$ и соответствующей нормой $||.||$. Отображение $B: \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ называется [линейным оператором, если

$$B(\alpha u + \beta v) = \alpha Bu + \beta Bv$$

для любых двух комплексных чисел $\alpha, \beta$ и любых двух элементов $u, v \in \mathfrak{H}$. Линейный оператор $B$ называется] ограниченным, если существует такое число $\beta_1 \geq 0$, что

$$||Bu|| \leq \beta_1 ||u||, \quad u \in \mathfrak{H} \tag{33}$$

Для любого ограниченного оператора $B$ норма задается формулой

$$||B|| = \sup_{||u||=1} ||Bu||. \tag{34}$$

Каждый ограниченный оператор $B$ задает билинейную форму при помощи равенства

$$b(u,v) = (u, Bv), \quad u, v \in \mathfrak{H}. \tag{35}$$

Эта билинейная форма ограничена:

$$|b(u,v)| \le \beta_1 ||u|| ||v||, \quad u, v \in \mathfrak{H}. \tag{36}$$

Обратное утверждает следующая важная теорема о представлении ограниченной билинейной формы:

**Теорема 6.** Для любой ограниченной билинейной формы $b$ найдется один единственный ограниченный линейный оператор $B$, такой, что

$$b(u,v) = (u, Bv), \quad u, v \in \mathfrak{H}. \tag{37}$$

*Доказательство.* Для любого $v \in \mathfrak{H}$ выражение

$$l_v(\varphi) = b(\varphi, v), \quad \varphi \in \mathfrak{H}$$

задает ограниченный линейный функционал $l_v \in \mathfrak{H}^*$. В силу теоремы Фреше-Рисса существует элемент $w \in \mathfrak{H}$, такой, что

$$l_v(\varphi) = (\varphi, w) = b(\varphi, v), \quad \varphi \in \mathfrak{H}. \tag{38}$$

Элемент $w$ определен однозначно через $v$, так, что мы фактически построили отображение

$$B: \quad v \in \mathfrak{H} \quad \rightarrow \quad w \in \mathfrak{H}$$

Это отображение, очевидно, линейное. Из (38) сразу получаем представление (37). Так как $b$ — ограниченная билинейная форма, имеем

$$(u, Bu) \le \beta_1 ||u|| ||v||, \quad u, v \in \mathfrak{H}.$$

Подставляя сюда $u = Bv$, получим

$$||Bv|| \le \beta_1 ||v||, \quad v \in \mathfrak{H},$$

так, что $B$ — ограниченный оператор. Оператор $B$ однозначно определен через билинейную форму $b$. В самом деле, если бы мы имели два таких опертора $B,\ B'$, то (37) было бы верно для всех $u, v \in \mathfrak{H}$, а значит, и $(u, (B - B')v) = 0$, то есть $(B - B')v = 0$ и, далее, $B = B'$. $\square$

Каждой ограниченной билинейной форме $b$ можно поставить в соответствие сопряженную билинейную форму по формуле

$$b^*(u, v) = \overline{b(v, u)}, \quad u, v \in \mathfrak{H}. \tag{39}$$

Вмести с $b$ форма $b^*$ также ограничена и в силу теоремы о представлении ограниченной билинейной формы существуют такие ограниченные линейные операторы $B,\ B^*$, для которых справедливо

$$\begin{aligned} (u, Bv) &= b(u, v) = \overline{b^*(v, u)} = \overline{(v, B^*u)} \\ &= (B^*u, v), \quad u, v \in \mathfrak{H}. \end{aligned} \tag{40}$$

Оператор $B^*$ называют сопряженным к $B$. Для нормы сопряженного оператора верно соотношение

$$||B^*|| = ||B||, \tag{41}$$

Оператор $B^{**} = (B^*)^*$, сопряженный к $B^*$, совпадает с $B$. Если $B$, $C$ — два ограниченных оператора, то верно $(BC)^* = C^*B^*$.

# 2 Вполне непрерывные билинейные формы и операторы

## 2.1 Слабая сходимость

До сих пор мы говорили лишь о сходимости последовательности $\{v_j\}$ по норме, когда $||v_j - v|| \to 0$ при $j \to \infty$. Такую сходимость будем далее называть сильной с тем, чтобы отличать ее от т.н. слабой сходимостью:

**Определение 1.** Говорят, что последовательность $\{v_j\}$ слабо сходится, если для любого $u \in \mathfrak{H}$ числовая последовательность $(u, v_j) \to a(u)$ при $j \to \infty$.

Теорема Фреше-Рисса позволяет ввести понятие слабого предела последовательности:

**Теорема 7.** Если $\{v_j\}$ сходится слабо, то существует такая функция $v \in \mathfrak{H}$, что при любом $u \in \mathfrak{H}$ числовая последовательность $(u, v_j) - (u, v) \to 0, (j \to \infty)$.

Этот элемент называют слабым пределом последовательности и пишут $v_j \rightharpoonup v$.

*Доказательство.* Заметим, что в силу неравенства Шварца

$$l_j(u) = (u, v_j)$$

— ограниченные линейные функционалы. Для доказательства их равномерной ограниченности нам понадобятся следующие утверждения:

(i) Теорема Кантора о пересечении: для системы замкнутых множеств $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{H}$, таких, что

$$\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2 \supset \dots, \ \text{dist} \ (\mathfrak{F}_n) \to 0$$

где $\text{dist} \ (\mathfrak{F}) = \sup\limits_{u,v \in \mathfrak{F}} ||u - v||$, пересечение $\cap \mathfrak{F}_n$ состоит ровно из одного элемента $u_0$. В самом деле, возьмем в каждом $\mathfrak{F}_n$ по элементу $u_n$. Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N$, что при $n > N$ $\text{dist} \ (\mathfrak{F}_n) < \varepsilon$, а значит, и $||u_n - u_{n+m}|| < \varepsilon$, последовательность $\{u_n\}$ сходится сильно к некоторому элементу $u_0 \in \mathfrak{H}$. Так как подпоследовательность $\{u_k, u_{k+1}, \dots\}$ принадлежит $\mathfrak{F}_k$, то $u_0 \in \mathfrak{F}_k$ при любом $k$. Это значит, что $u_0 \in \cap \mathfrak{F}_n$, то есть это множество содержит хотя бы один элемент. Если ему принадлежит еще один элемент $w$, то $||u - w|| < \text{dist} \ (\mathfrak{F}_n) \to 0$, то есть $u = w$, что и тр. д.

(ii) Если замкнутое множество $\mathfrak{F}$ не содержит ни одного замкнутого круга вида $K_r[u_0] = \{u \in \mathfrak{H} : \ ||u - u_0|| \leq r$, то любой замкнутый круг $K_r[u_0]$ содержит круг, целиком не принадлежащий $\mathfrak{F}$. В самом деле, раз уж $K_{r/2}[u_0] \not\subset \mathfrak{F}$, то в этом круге существует элемент $u_1 \notin \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ замкнуто, то вмести с $u_1$ множеству $\mathfrak{F}$ не принадлежит и его малая круговая окрестность $K_{r_1}[u_1]$ с $r_1 \leq r/2$. Значит, во-первых, $K_{r_1}[u_1] \cap \mathfrak{F} = \emptyset$, а во-вторых, $K_{r_1}[u_1] \subseteq K_r[u_0]$, так как $r_1 \leq r/2$ и $||u_1 - u_0|| \leq r/2$, что и тр. д.

(iii) Принцип Бера о категориях: если $\mathfrak{H} = \cup \mathfrak{F}_n$, где $\mathfrak{F}_n$ — некоторые замкнутые множества, то хотя бы при одном значении $n$ множество $\mathfrak{F}_n$ содержит замкнутый круг. В самом деле, допустим противное. Тогда зададимся произвольным кругом $K_0$, в силу (ii) существует круг $K_1 \subset K_0$, для которого верно dist $(K_1) \leq 1$ и $K_1 \cap \mathfrak{F}_1 = \emptyset$; далее, существует круг $K_2 \subset K_1$, для которого верно dist $(K_2) \leq 1/2$ и $K_2 \cap \mathfrak{F}_2 = \emptyset$ и т.д. Значит существует последовательность кругов $K_1 \supset K_2 \supset$ c dist $(K_n) \to 0$. В силу теоремы Кантора (i) их пересечение $\cap K_n$ содержит ровно один элемент, обозначим его как $u_0$. С другой стороны, $u_0 \notin \cup \mathfrak{F}_n = \mathfrak{H}$, что невозможно.

(iv) Введем теперь замкнутые множества

$$\mathfrak{F}_n = \{u \in \mathfrak{H} : \ |l_j(u)| \leq n \text{при всех } j = 1, 2, \dots\}$$

Поскольку при любом фиксированном $u \in \mathfrak{H}$ числовая последовательность $l_j(u)$ сходится, она ограничена по модулю, т.е. найдется столь большое $n$, что $u \in \mathfrak{F}_n$. Поэтому $\mathfrak{H} = \cup \mathfrak{F}_n$. В силу принципа Бера (iii) среди $\mathfrak{F}_n$ имеется такое множество $\mathfrak{F}_m$, которое содержит замкнутый круг $K_r[u_0]$. Значит, при $||u - u_0|| \leq r$ верно неравенство

$$|l_j(u)| \leq m, \quad j = 1, 2, \dots$$

или

$$|l_j(u - u_0)| \leq m + |l_j(u_0)|, \quad j = 1, 2, \dots$$

Но тогда при любом $w$ с $||w|| = 1$ верно

$$|l_j(w)| \leq \frac{m + |l_j(u_0)|}{r}, \quad j = 1, 2, \dots$$

т.е. $l_j(u)$ — равномерно ограниченные линейные функционалы.

Теперь мы можем ввести линейный функционал

$$l(u) = \lim_{j \to \infty} l_j(u)$$

который ограничен, в силу равномерной ограниченности $l_j$. В силу теоремы Рисса-Фреше, существует такой элемент $v \in \mathfrak{H}$, что $l(u) = (u, v)$, что и доказывает теорему. $\square$

Помимо теоремы мы доказали выше в пункте (iv) одно полезное для дальнейшего утверждение: всякая слабо сходящаяся последовательность ограничена по норме.

Заметим теперь, что всякая сильно сходящаяся последовательность $v_j \to v$ сходится слабо и к тому же пределу $v$. Обратное верно лишь при некоторых условиях:

**Теорема 8.** Если $v_j \rightharpoonup v$ и $||v_j|| \to ||v||$, то $v_j \to v$ при $j \to \infty$.

*Доказательство.* Оценим

$$||v - v_j|| = ||v||^2 + ||v_j||^2 - (v, v_j) - (v_j, v) = ||v||^2 + ||v_j||^2 - (v, v_j) - \overline{(v, v_j)} \to 0$$

$\square$

Отметим еще одно важное для дальнейшего свойство слабо сходящихся последовательностей, называемое теоремой о выборе:

**Теорема 9.** Из любого ограниченного множества гильбертова пространства, содержащего бесконечное число элементов, можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность

*Доказательство.* (i) Из любого ограниченного множества гильбертова пространства, содержащего бесконечное число элементов, можно выделить ограниченную последовательность элементов. Поэтому нужно доказать, что из любой ограниченной последовательности — скажем $\{v_j\}$ с $||v_j|| \leq C$ — можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

(ii) Введем теперь ортонормированную последовательность элементов $\mathfrak{H}$ следующим образом: $w_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$, $w_2 = \frac{v_2 - (w_1, v_2) w_1}{\|v_2 - (w_1, v_2) w_1\|}$ и т.д. Исходная последовательность $\{v_j\}$ принадлежит линейному подпространству $\mathfrak{M} \in \mathfrak{H}$, натянутому на $\{w_j\}$, то есть множеству всех элементов вида:

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j w_j$$

с конечной нормой $||u||^2 = \sum |c_j|^2$.

Заметим, что для любой сходящейся сильно последовательности

$$u^k = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^k w_j$$

элементов $\mathfrak{M}$, верно

$$||u^k - u^{k'}||^2 = \sum |c_j^k - c_j^{k'}|^2 \to 0$$

при $k, k' \to \infty$. Поэтому существует предел $c_j = \lim c_j^k$ и $u^k \to \sum c_j w_j$, то есть последовательность сходится к элементу $\mathfrak{M}$. Итак, $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство $\mathfrak{H}$.

В силу теоремы 3 для любого $u \in \mathfrak{H}$ справедливо представление

$$u = u' + u'', \quad u' \in \mathfrak{M}, u'' \in \mathfrak{M}^{\perp},$$

поэтому, в частности,

$$(u, v_j) = (u', v_j).$$

Поскольку последовательность $\{(w_k, v_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ — ограничена, при помощи теоремы Больцано-Вейерштрасса и классического диагонального процесса[1] можно доказать, что существует такое множество натуральных чисел

[1] Диагональный процесс Кантора — способ, при помощи которого из бесконечной матрицы

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \cdot & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \dots \\ \cdot & & & & \end{matrix}$$

элементы которой равномерно ограничены, можно выделить подпоследовательность $\{a_{ij_k}\}$, сходящуюся при любом натуральном $i$.

Способ состоит в следующем. В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса из первой строки можно выделить

$\mathbb{M}$, что подпоследовательность $\{(w_k, v_j)\}_{j\in\mathbb{M}}$ сходится при любом $k$. Значит, вполне определен функционал

$$l(u) = \lim_{j\in\mathbb{M},\, j\to\infty} (u, v_j) = \lim_{j\in\mathbb{M},\, j\to\infty} (u', v_j) = \sum_k (u', w_k) \lim_{j\in\mathbb{M},\, j\to\infty} (w_k, v_j).$$

Он в силу $||v_j|| < C$ ограничен и в силу теоремы Фреше-Рисса существует такая $v \in \mathfrak{H}$, что

$$l(u) = (u, v).$$

В силу предыдущего равенства это значит, что $v_j \rightharpoonup v$ при $j \in \mathbb{M}$ $\square$

## 2.2 Вполне непрерывные операторы

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(.,.)$ и соответствующей нормой $||.||$. В основу нашего рассмотрения положим следующее определение вполне непрерывного оператора:

---

подпоследовательность

$$a_{1j_{11}},\ a_{1j_{12},\ldots a_{1j_{1n}},\ldots}$$

сходящуюся к некоторому числу $\alpha_1$. Обозначим индекс $j_{11}$ как $k_1$ и выберем из числовой последовательности

$$a_{2j_{12}},\ a_{2j_{13},\ldots a_{2j_{1n}},\ldots}$$

опять сходящуюся подпоследовательность. Обозначим ее как

$$a_{2j_{22}},\ a_{2j_{23},\ldots a_{2j_{2n}},\ldots},$$

ее предел — как $\alpha_2$, а индекс $j_{22}$ как $k_2$.

Продолжая так дальше, мы получим при каждом $i = 1, 2, \ldots$ последовательность

$$a_{ij_{ii}},\ a_{ij_{i,i+1}}, \ldots$$

сходящуюся к некоторому числу $\alpha_i$. При этом мы опять обозначим $j_{ii} = k_i$.

Рассмотрим теперь числовую последовательность

$$a_{ik_1},\ a_{ik_2}, \ldots, a_{ik_n}, \ldots.$$

При любом $i = 1, 2, \ldots$ ее элементы составляют подмножество элементов последовательности

$$a_{ij_{ii}},\ a_{ij_{i,i+1}}, \ldots,$$

сходящейся к $\alpha_i$. Поэтому и последовательность

$$a_{ik_1},\ a_{ik_2}, \ldots, a_{ik_n}, \ldots.$$

сходится к $\alpha_i$ при $i = 1, 2, \ldots$, а значит и является искомой.

**Определение 2.** Пусть $K$ — линейное отображение гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ самого на себя. Тогда $K$ называют вполне непрерывным или компактным, если для любой ограниченной последовательности $\{u_j\}$ последовательность $\{Ku_j\}$ содержит сильно сходящуюся подпоследовательность.

Из этого определения можно непосредственно получить свойства компактного оператора:

**Теорема 10.** Любой вполне непрерывный оператор $K$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ ограничен и вместе с $K$ сопряженный оператор $K^*$ тоже вполне непрерывен.

*Доказательство.* (i) Допустим, что $K$ не ограничен, тогда должна существовать последовательность элементов из $\mathfrak{H}$, обладающая следующим свойством:

$$||u_j|| = 1, \quad ||Ku_j|| \to \infty \quad (j \in \mathbb{N},\ j \to \infty) \tag{42}$$

Так как последовательность $\{u_j\}$ ограниченна и $K$ — вполне непрерывный, существует подпоследовательность $\mathbb{N}'$ последовательность $\mathbb{N}$ натуральных чисел, для которой $\{Ku_j\}_{j\in\mathbb{N}'}$ сильно сходится. Но в силу (42) также верно $||Ku_j|| \to \infty$ $(j \in \mathbb{N}',\ j \to \infty)$, что противоречит установленной только что сходимости этой последовательности.

(ii) В силу (i) вполне непрерывный оператор $K$ ограничен, поэтому существует сопряженный оператор $K^*$ и $K^*$ является ограниченным линейным оператором из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$. Для ограниченной последовательности $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ с $||u_j|| \leq C,\ j \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$||K^*u_j - K^*u_k||^2 = (u_j - u_k, KK^*(u_j - u_k)) \leq 2C||Kv_j - Kv_k|| \tag{43}$$

где $v_j = K^*u_j,\ j,k \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{v_j\}$ ограничена, поскольку $||v_j|| \leq ||K^*||||u_j|| \leq C||K^*||,\ j \in \mathbb{N}$. Поэтому существует подпоследовательность $\mathbb{N}'$ последовательности $\mathbb{N}$ натуральных чисел, такая, что

$\{Kv_j\}_{j\in\mathbb{N}'}$ сходится. В силу (43) тогда и последовательность $\{K^*u_j\}_{j\in\mathbb{N}'}$ сходится. Тем самым мы указали сходящуюся подпоследовательность последовательности $\{K^*u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. $\square$

На возможность другого определения вполне непрерывного оператора указывает следующее утверждение:

**Теорема 11.** Линейный оператор $K$ на гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ является вполне непрерывным тогда и только тогда, когда $K$ отображает любую слабо сходящуюся последовательность $\{u_j\}$ в последовательность, сходящуюся сильно:

$$u_j \rightharpoonup u \quad \Rightarrow \quad Ku_j \to Ku \quad (j \to \infty). \tag{44}$$

*Доказательство.* (i) Предположим сначала, что линейное отображение $K$ обладает свойством (44) для любой слабо сходящейся последовательности $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Для любой ограниченной последовательности $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ существует подпоследовательность $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$, такая, что $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}'}$ слабо сходится. Для этой подпоследовательности в силу (44) последовательности $\{Ku_j\}_{j\in\mathbb{N}'}$ сходится сильно. Следовательно, $K$ должен быть вполне непрерывным.

(ii) Пусть теперь наоборот $K$ — вполне непрерывный. Для любой слабо сходящейся последовательности $\{u_j\}$ с $u_j \rightharpoonup u$ $(j \to \infty)$ верно

$$(Ku_j, v) = (u_j, K^*v) \to (u, K^*v) = (Ku, v) \quad (j \to \infty)$$

при любом $v \in \mathfrak{H}$, то есть также

$$u_j \rightharpoonup u \quad \Rightarrow \quad Ku_j \rightharpoonup Ku \quad (j \to \infty). \tag{45}$$

Любая сильно сходящаяся последовательность сходится к тому же пределу, что и в смысле слабой сходимости. Поэтому, если последовательность $\{Ku_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ при $u_j \rightharpoonup u$ $(j \to \infty)$ содержит сильно сходящуюся подпоследовательность $\{Ku_j\}_{j\in\mathbb{N}'}$, $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$, то необходимо сходится $Ku_j \to Ku$ $(j \in \mathbb{N}',\ j \to \infty)$. Предположим теперь только, что для последовательности $\{u_j\}$

верно $u_j \rightharpoonup u$, но не $Ku \to Ku$ $(j \to \infty)$. Тогда существует положительное число $\varepsilon_0$ и подпоследовательность $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}'}$ такие, что

$$||Ku_j - Ku|| \geq \varepsilon_0 > 0, \quad j \in \mathbb{N}'. \tag{46}$$

Так как $K$ вполне непрерывный, существует сильно сходящаяся подпоследовательность $\{Ku_j\}_{j\in\mathbb{N}''}$, $\mathbb{N}'' \subseteq \mathbb{N}'$. При $u_j \rightharpoonup u$ $(j \in \mathbb{N}'',\ j \to \infty)$ в силу сказанного выше необходимо $Ku_j \to Ku$, что противоречит неравенству (46). □

## 2.3 Вполне непрерывные билинейные формы.

Пусть опять $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство и $K$ — вполне непрерывный оператор на $\mathfrak{H}$. Определим билинейную форму $k$ на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ соотношением

$$k(u,v) = (u, Kv), \quad u, v \in \mathfrak{H}, \tag{47}$$

так, что $k$ ограниченная билинейная форма на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Эта билинейная форма обладает тем свойством, что для любой пары слабо сходящихся последовательностей $\{u_j\}, \{v_j\}$ справедливо

$$u_j \rightharpoonup u,\ v_j \rightharpoonup v \quad \Rightarrow \quad k(u_j, v_j) \to k(u,v) \quad (j \to \infty). \tag{48}$$

В самом деле, так как любая слабо сходящая последовательность ограничена, по теореме 11 сходится

$$|k(u_j, v_j) - k(u,v)| \leq ||u_j||||Kv_j - Kv|| + |(u_j - u, Kv)| \to 0$$

при $j \to \infty$. Это свойство можно использовать для определения понятия вполне непрерывной билинейной формы:

**Определение 3.** Пусть $k$ — билинейная форма на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Тогда $k$ называют вполне непрерывной, если для любой пары $\{u_j\}, \{v_j\}$ слабо сходящихся последовательностей справедливо утверждение (48).

Из этого определения сразу следует теорема об ограниченности вполне непрерывной билинейной формы:

**Теорема 12.** Любая вполне непрерывная билинейная форма на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ ограниченна и вместе с $k$ также вполне непрерывна и сопряженная билинейная форма $k^*$.

*Доказательство.* (i) Допустим, что билинейная форма $k$ не ограниченна, то существует две такие последовательности $\{u_j\}, \{v_j\}$, что

$$\|u_j\| = 1,\ \|v_j\| = 1, \quad |k(u_j, v_j)| \to \infty \quad (j \to \infty) \tag{49}$$

Тогда существуют сходящиеся слабо подпоследовательности $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}'},\ \{v_j\}_{j \in \mathbb{N}'},\ \mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$, для которых в силу того, что $k$ вполне непрерывна, должно быть верно

$$u_j \rightharpoonup u,\ v_j \rightharpoonup v \quad \Rightarrow \quad k(u_j, v_j) \to k(u, v) \quad (j \in \mathbb{N}',\ j \to \infty).$$

что противоречит (49).

(ii) Если соотношение (48) верно для билинейной формы $k$ на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$, то оно верно и для сопряженной билинейной формы $k^*$, поскольку

$$k^*(u_j, v_j) = \overline{k(v_j, u_j)} \to \overline{k(v, u)} = k^*(u, v) \quad (j \to \infty).$$

для любой пары $\{u_j\}, \{v_j\}$ слабо сходящихся последовательностей, так что $k^*$ тоже вполне непрерывна. □

Уточним теперь теорему о представлении ограниченной билинейной формы:

**Теорема 13.** Билинейная форма $k$ на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ вполне непрерывна тогда и только тогда, когда существует такой вполне непрерывный оператор $K$, что

$$k(u, v) = (u, Kv), \quad u, v \in \mathfrak{H} \tag{50}$$

*Доказательство.* (i) Если справедливо такое представление с вполне непрерывным оператором $K$, то полную непрерывность $k$ мы уже установили при подготовке определения 3.

(ii) Пусть теперь наоборот билинейная форма $k$ на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ вполне непрерывна. В силу теоремы 12 $k$ ограничена, поэтому, в силу теоремы о представлении ограниченной билинейной формы, существует такой ограниченный оператор $K$, что

$$k(u, v) = (u, Kv).$$

Для любой слабо сходящейся последовательности $\{v_j\}$ положим $u_j = Kv_j$, тогда последовательность $\{u_j\}$ сходится слабо к $u = Kv$. Вместе с тем

$$||Kv_j||^2 = (u_j, Kv_j) = k(u_j, v_j) \to k(u, v) = (u, Kv) = ||Kv||^2 \tag{51}$$

при $j \to \infty$. Заметим теперь, что имеет место эквивалентность:

$$u_j \to u \Longleftrightarrow u_j \rightharpoonup u, ||u_j|| \to ||u|| \quad (j \to \infty) \tag{52}$$

Поэтому для любой слабо сходящейся последовательности $\{v_j\}$ из (51) и (52) следует сильная сходимость последовательности $\{Kv_j\}$, а значит, и полная непрерывность оператора $K$. □

## 2.4 Критерий полной непрерывности билинейной формы и неравенство Эрлинга

В этом разделе мы докажем некоторые критерии полной непрерывности билинейной формы вместе с одним весьма общим неравенством, которое в применении к конкретным пространствам было указано Эрлингом (Ehrling).

**Теорема 14.** Билинейная форма $k$ на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ вполне непрерывна тогда и только тогда, когда $k$ ограничена и для любой слабо сходящейся к нулю последовательности $\{v_j\}$ справедливо:

$$v_j \rightharpoonup 0 \quad \Rightarrow \quad k(v_j) \to 0 \quad (j \to \infty). \tag{53}$$

*Доказательство.* (i) Если $k$ — вполне непрерывная форма, то $k$ ограничена и верно

$$v_j \rightharpoonup 0 \quad \Rightarrow \quad k(v_j) = k(v_j, v_j) \to k(0, 0) = 0 \quad (j = \infty).$$

(ii) Пусть $k$ — ограниченная билинейная форма на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ и пусть $K$ — ограниченный линейный оператор на $\mathfrak{H}$ в представлении $k(u,v) = (u, Kv)$, $u, v \in \mathfrak{H}$. Для любой слабо сходящейся последовательности $\{w_j\}$ тогда верно

$$w_j \rightharpoonup w \quad \Rightarrow \quad k(w_j, w) = (w_j, Kw) \to (w, Kw) = k(w) \tag{54}$$

при $j \to \infty$. Итак, $k(w, w_j) \to k(w)$ при $j \to \infty$. Для любой последовательности $\{w_j\}$ имеет место представление:

$$k(w_j - w) = k(w_j) + k(w) - k(w, w_j) - k(w_j, w).$$

Поэтому для любой слабо сходящейся последовательности $\{w_j\}$ с $w_j \rightharpoonup w$ $(j \to \infty)$ в силу предположения (53) и соотношения (54) верно

$$w_j \rightharpoonup w \quad \Rightarrow \quad k(w_j) \to k(w) \quad (j \to \infty). \tag{55}$$

Пусть теперь $\{u_j\}, \{v_j\}$ — две слабо сходящиеся последовательности с $u_j \rightharpoonup u$, $v_j \rightharpoonup v$ $(j \to \infty)$. Воспользуемся теперь тем, что

$$k(u_j, v_j) = \frac{1}{4}\left\{k(u_j + v_j) - k(u_j - v_j) + ik(u_j + iv_j) - ik(u_j - iv_j)\right\} \tag{56}$$

при $j \in \mathbb{N}$. Аргументы квадратичной формы $k$ в правой части этого равенства сходятся слабо. Поэтому из (55) и (56) следует сходимость числовой последовательности $\{k(u_j, v_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ к пределу

$$\lim_{j \to \infty} k(u_j, v_j) = \frac{1}{4}\left\{k(u+v) - k(u-v) + ik(u+iv) - ik(u-iv)\right\} = k(u,v),$$

а это и означает, что $k$ вполне непрерывна. $\square$

Еще один критерий полной непрерывности билинейной формы дает следующая теорема.

**Теорема 15.** Билинейная форма $k$ на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ вполне непрерывна тогда, когда для любого числа $\varepsilon \in (0, 1]$ существует такая вполне непрерывная билинейная форма $k_\varepsilon$, что

$$|k(u)| \le \varepsilon ||u||^2 + |k_\varepsilon(u)|, \quad u \in \mathfrak{H}. \tag{57}$$

*Доказательство.* Для любого $\varepsilon \in (0,1]$ билинейная форма $k_\varepsilon$ ограничена. Поэтому существует такое число $\gamma$, что при $\varepsilon = 1$ из (57) следует

$$|k(u)| \leq (1+\gamma)||u||^2, \quad u \in \mathfrak{H}. \tag{58}$$

Следовательно, квадратичная форма $k$ на $\mathfrak{H}$ ограничена, а это эквивалентно тому, что билинейная форма $k$ на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ ограничена.

Пусть $\{u_j\}$ — произвольная слабо сходящаяся к нулю последовательность. В силу теоремы (14) при любом $\varepsilon \in (0,1]$ последовательность

$$k_\varepsilon(u_j) \to 0 \quad (j \to \infty),$$

и существует положительное число $C$ с $||u_j||^2 \leq C, \ \ j \in \mathbb{N}$. Поэтому для любого $\eta > 0$ и с $\varepsilon = \frac{\eta}{2C}$ существует такое число $j_0(\eta)$, что

$$|k_\varepsilon(u_j)| < \frac{\eta}{2}, \quad j > j_0(\eta).$$

Тогда, в силу неравенства (57), верно

$$|k(u_j)| < \frac{\eta}{2C}C + \frac{\eta}{2} = \eta, \quad j > j_0(\eta),$$

таким образом, и $k(u_j) \to 0$ $(j \to \infty)$. Поэтому все предположения теоремы 14 выполнены и, значит, билинейная форма $k$ вполне непрерывна. $\square$

Теперь мы хотим доказать еще одно неравенство, которое в применении к конкретным пространствам было указано Эрлингом (Ehrling) и которое мы будем далее называть неравенством Эрлинга.

**Теорема 16.** Пусть $k$ — вполне непрерывная билинейная форма и $q$ — вполне непрерывная симметричная, строго положительная билинейная форма на $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Тогда для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\kappa(\varepsilon)$, что справедливо неравенство

$$|k(u)| \leq \varepsilon ||u||^2 + \kappa(\varepsilon) q(u), \quad u \in \mathfrak{H}. \tag{59}$$

*Доказательство.* Доказательство проведем от противного. Итак, предположим, что нам задано некоторое положительное число $\varepsilon_0 > 0$ и для каждого $\kappa = j$ $(j = 1, 2, \dots)$ — элемент $v_j \in \mathfrak{H}$ с

$$|k(v_j)| > \varepsilon_0 + jq(v_j), \quad ||v_j|| = 1, \quad j = 1, 2, \dots. \tag{60}$$

Так как любая ограниченная последовательность в $\mathfrak{H}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, мы можем, не ограничивая общности, считать, что последовательность $\{v_j\}$ слабо сходится к элементу $v$. Следовательно,

$$v_j \rightharpoonup v, \quad k(v_j) \to k(v) \quad (j \to \infty). \tag{61}$$

Далее, в силу неравенства (60) [и ограниченности $\{v_j\}$], верно

$$0 \le q(v_j) < \frac{1}{j}\{|k(v_j)| - \varepsilon_0\} \to 0 \quad (j \to \infty).$$

Вспомним теперь, что билинейная форма $q$ по условию строго положительная, значит,

$$0 \le q(v_j - v) = q(v_j) + q(v) - q(v_j, v) - q(v, v_j) \to -q(v) \quad (j \to \infty)$$

или $0 \le q(v) \le 0$, то есть $q(v) = 0$ и, следовательно, $v = 0$. Но тогда в силу (61) $k(v_j)$ сходится к нулю при $j \to \infty$, что противоречит неравенству $|k(v_j)| > \varepsilon_0$ $(j = 1, 2, \dots)$, которое сразу получается из (60). $\square$