

Методы математической физики
Семинар № 8. Метод конечных элементов: примеры и
обоснование.

Мих. Дмитр. Малых

Физический факультет МГУ

2012/13 уч. г., версия от 24 июня 2012 г.

Пример № 1.

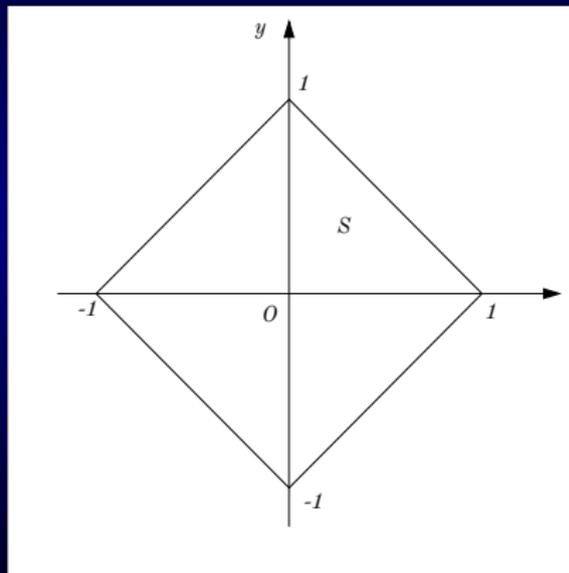
Краевая задача в прямоугольнике

Краевая задача в прямоугольнике

Рассмотрим задачу

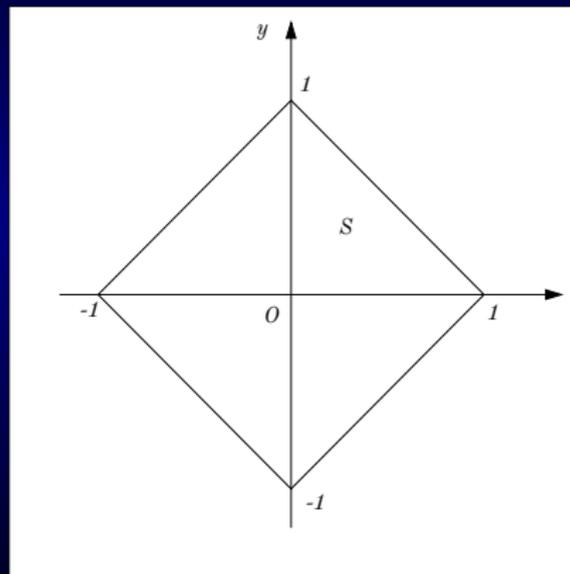
$$\begin{cases} \Delta u + e^{-x^2-y^2} = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

в квадрате с вершинами в точках $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$.



Шаг № 1: разбиение на 4-ре треугольника

Разобьем его диагоналями на 4 треугольника. У них будет одна внутренняя вершина – точка O , с ней мы должны связать одну базовую функцию φ_1 .



Шаг № 2: построение базисной функции

Функция φ_1 должна быть линейной в треугольнике S с вершинами $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$:

$$\varphi_1 = a + bx + cy,$$

равной нулю в вершинах $(1, 0)$, $(0, 1)$ и единице в $(0, 0)$.
Следовательно,

$$\{0 = a + b, \quad 0 = a + c, \quad 1 = a,$$

поэтому в треугольнике $\varphi_1 = 1 - x - y$.

Из соображения симметрии сразу можно написать выражение

$$\varphi_1 = 1 - |x| - |y|,$$

годное во всем квадрате.

Шаг № 3: дискретизация уравнения Пуассона

Решение следует искать в виде

$$u = u_1 \varphi_1,$$

записав для коэффициента u_1 одно уравнение, именно

$$a_{11}u_1 + f_1 = 0.$$

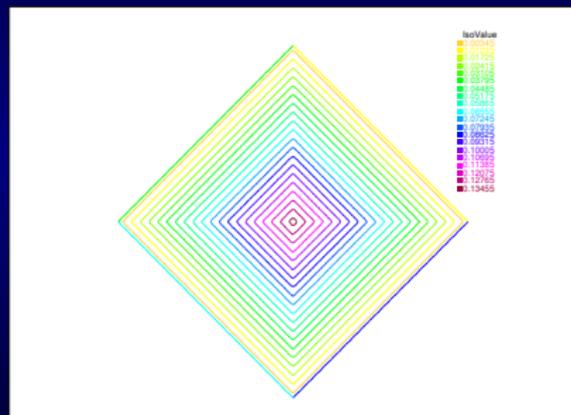
$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_{\Omega} dx dy (\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_1) = 4 \int_S dx dy (\nabla(1-x-y), \nabla(1-x-y)) = \\ &= 4|S|(1+1) = 8|S| = 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_i &= \int_{\Omega} dx dy f \varphi_1 = -4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy e^{-x^2-y^2} (1-x-y) = \\ &= -4 \times 0.138. \end{aligned}$$

Ответ.

$$u = 0.138(1 - |x| - |y|).$$

Графиком этой функции является пирамида, решение имеет максимум в нуле с $u_{\max} = 0.138$, от него монотонно спадает до нуля на границах области.



Измельчение сетки

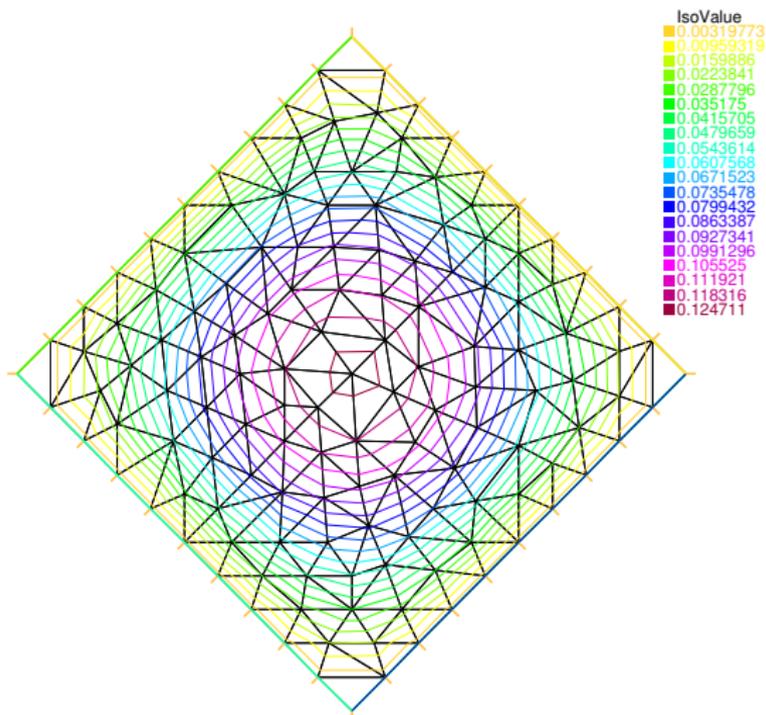
Это описание не претерпевает принципиальных изменений при увеличении числа треугольников. Грани пирамиды, изображающей график решения, разглаживаются, но ни максимум, ни общий характер решения при этом существенно не изменились. Более того, ошибка лежит в пределах второй значащей цифры.

Решение задачи в FreeFem++

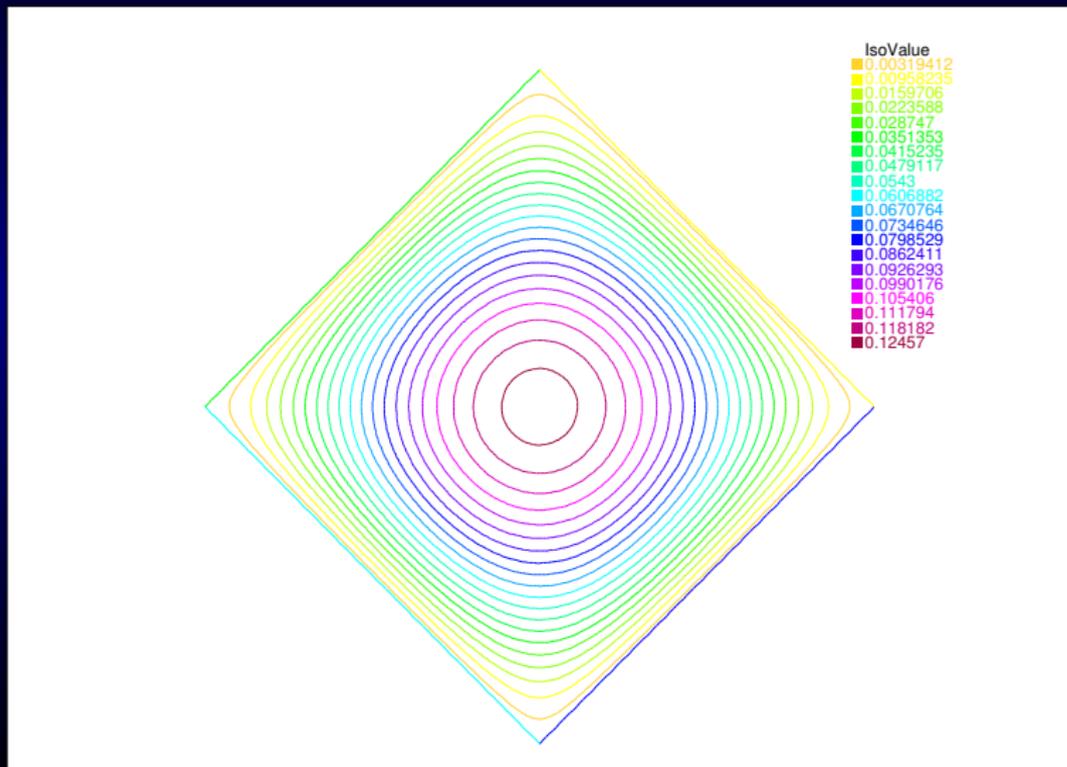
Файл Poisson-5.edp

```
border C1(t=0,1){x=1-t; y=0+t;}
border C2(t=0,1){x=0-t; y=1-t;}
border C3(t=0,1){x=-1+t; y=0-t;}
border C4(t=0,1){x=0+t; y=-1+t;}
mesh Th = buildmesh (C1(10)+C2(10)+C3(10)+C4(10));
fespace Vh(Th,P1);
Vh u,v;
func f= -exp(-x^2-y^2);
solve Poisson(u,v,solver=LU) =
int2d(Th)(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v))
+int2d(Th)( f*v)
+ on(C1,C2,C3,C4,u=0) ;
plot(Th,u,ps="Poisson-5b.eps",value=true,fill=false);
```

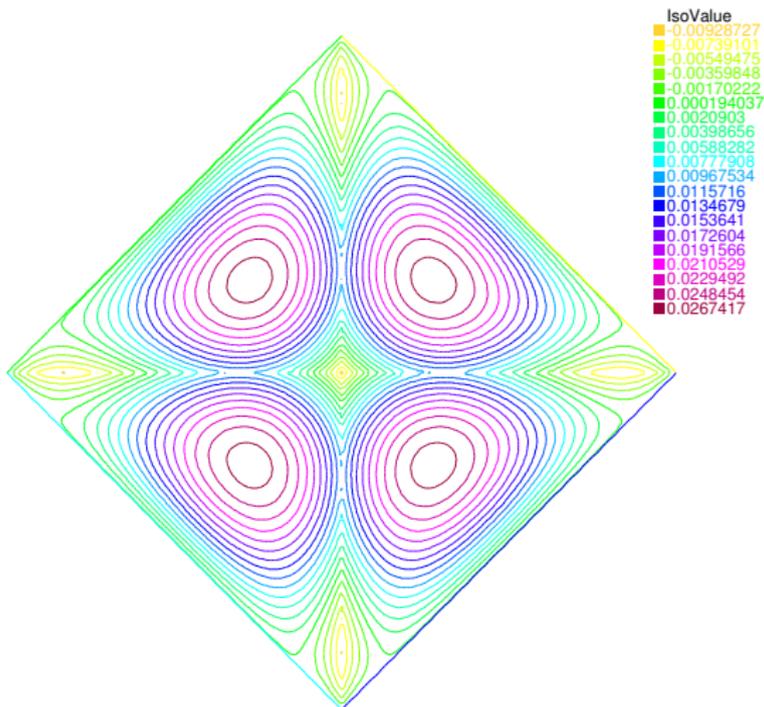
Решение при выборе 10 точек на стороне квадрата



Решение при выборе 100 точек на стороне квадрата



Разность приближенных решений



Пример № 2.

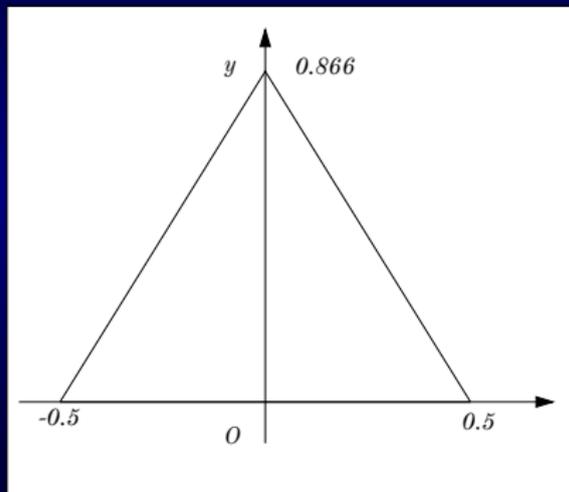
Краевая задача в треугольнике

Краевая задача в треугольнике

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta u + e^{-x^2-y^2} = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

в равностороннем
треугольнике с вершинами в
точках $(0.5, 0)$, $(-0.5, 0)$,
 $(0, \sqrt{3}/2)$.

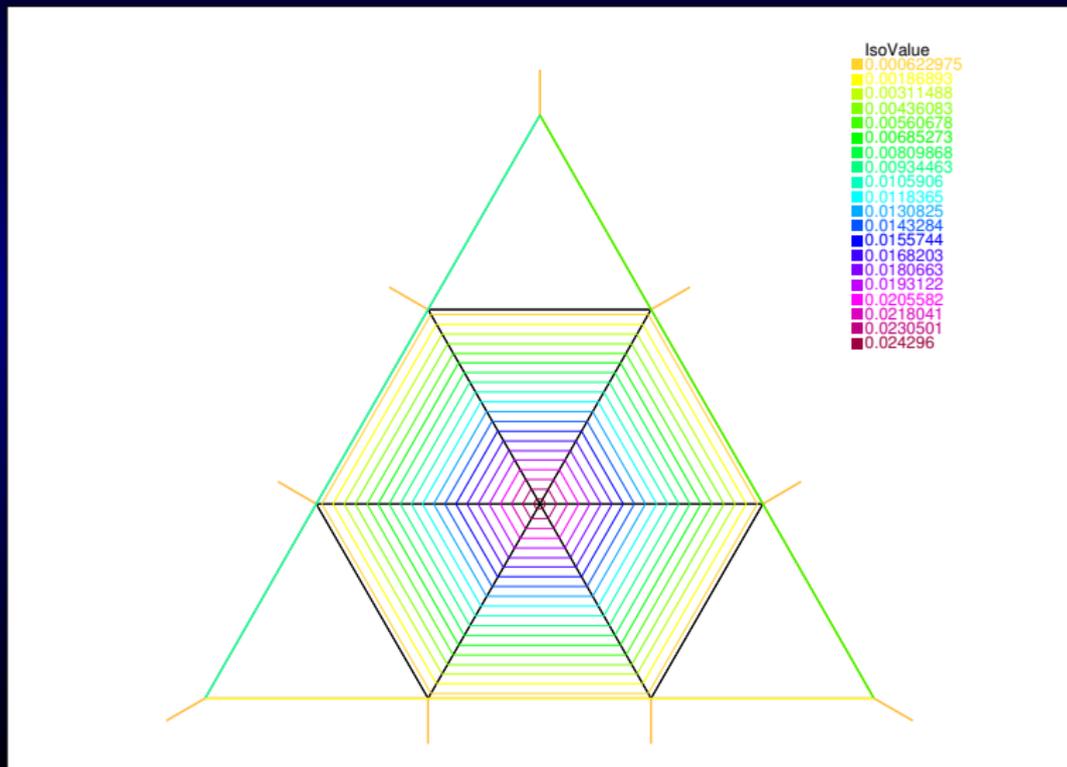


Решение задачи в FreeFem++

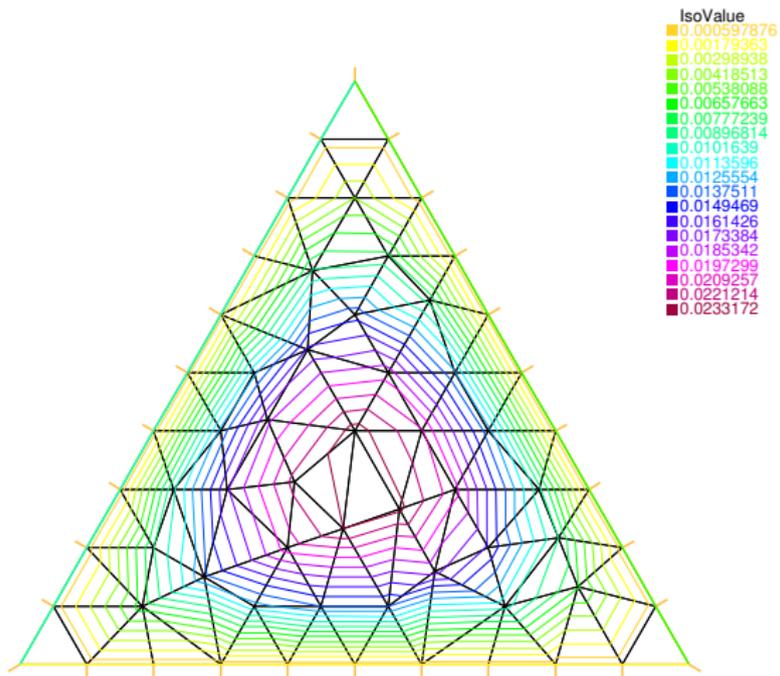
Файл Poisson-6.edp

```
border C1(t=0,1){x=-0.5+t; y=0;}
border C2(t=0,1){x=0.5-(cos(pi/3))*t; y=(sin(pi/3))*t;}
border C3(t=0,1){x=-(cos(pi/3))*t; y=(sin(pi/3))*(1-t);}
mesh Th = buildmesh (C1(3)+C2(3)+C3(3));
fespace Vh(Th,P1);
Vh u,v;
func f= -exp(-x^2-y^2);
solve Poisson(u,v,solver=LU) =
int2d(Th)(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v))
+int2d(Th)( f*v)
+ on(C1,C2,C3,u=0) ;
plot(Th,u,ps="Poisson-6.eps",value=true,fill=false);
```

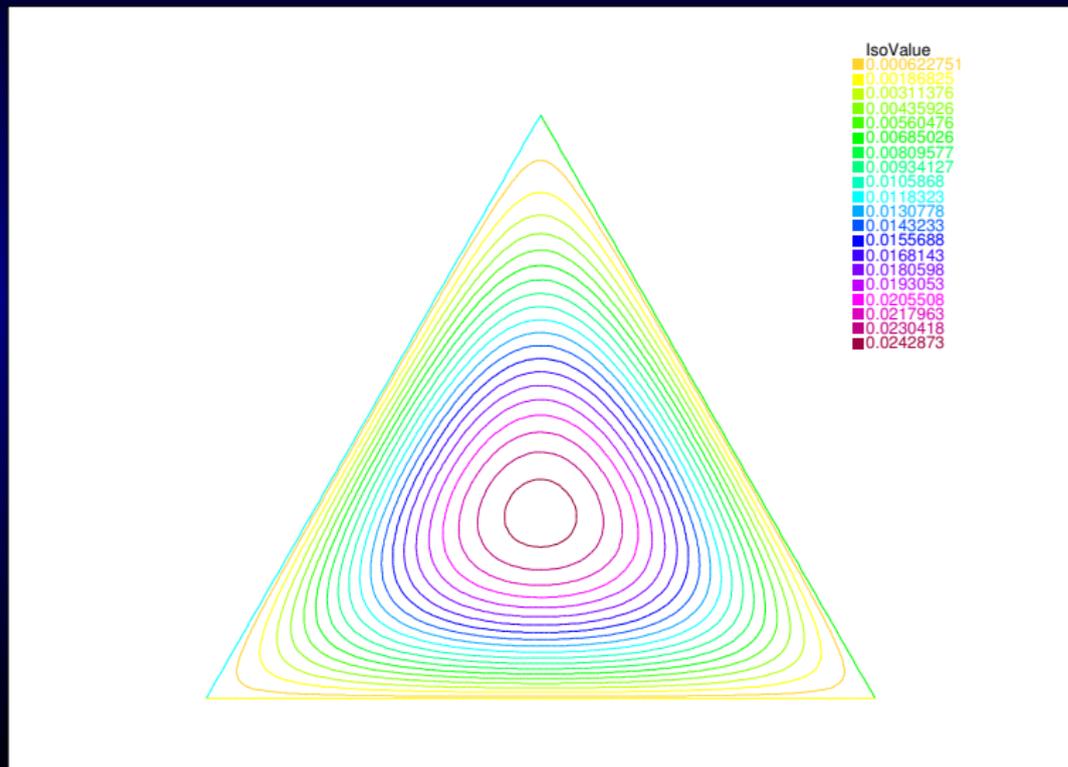
Решение с одной базисной функцией



Решение при сотне элементов



Решение при 10 тыс. элементах



Вопрос № 2.

Существование решения и МКЭ

Классический подход

Мы умеем строить графики решений краевых задач для уравнения Пуассона в самых причудливых областях, но не знаем, что это решение существует.

В XIX веке было дано доказательство о существовании классического решения первой краевой задачи средствами теории электростатических потенциалов, в начале XX века был тщательно исследован вопрос о связи гладкости решения и гладкости границы и правой части. Итогом явилась знаменитая теорема Шаудера (Juliusz Schauder, 1934 г.), потрясшая воображение своей длиной и кропотливостью. В связи с этим см. [1], особенно стр. 151 и 155.

Неклассический подход

Рихард Курант и МКЭ идут неожиданным путем:

- область аппроксимируется треугольниками, а следовательно, граница – ломанной,
- решение аппроксимируется кусочно-линейной функцией, которая заведом не имеет 2-х производных.

Быть может, все проблемы от чрезмерной гладкости того решения, которое мы ищем?

Слабая постановка задачи

МКЭ заменяет классическую постановку краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = f, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

на слабую постановку:

$$\int_{\Omega} dx dy (\nabla u, \nabla v) + \int_{\Omega} dx dy f v = 0 \quad (2)$$

для всех кусочно-дифференцируемых v , обращаящихся в нуль на границе.

$\mathfrak{W}(\Omega)$

Здесь и далее множество функций v выбирается таким образом, чтобы ему принадлежали базисные функции МКЭ.

Определение

$\mathfrak{W}(\Omega)$ – множество функций, которые сами непрерывны в замыкании области Ω и равны нулю на ее границе, а их частные производные определены всюду, кроме некоторых кривых, на которых они испытывают скачки.

Слабая постановка и линейная алгебра

С точки зрения линейной алгебры

- $\mathfrak{V}(\Omega)$ – линейное пространство над полем \mathbb{R} .
- $a(u, v) = \int_{\Omega} dx dy (\nabla u, \nabla v)$ – положительно определенная билинейная форма на $\mathfrak{V}(\Omega) \times \mathfrak{V}(\Omega)$, которую можно принять за скалярное произведение в $\mathfrak{V}(\Omega)$.
- $l(v) = - \int_{\Omega} dx dy f v$ – *ограниченный* линейный функционал.

Слабая постановка краевой задачи имеет вид

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathfrak{V}(\Omega).$$

Теорема Рисса-Фреше

В конечномерном векторном пространстве \mathfrak{E} действие линейного функционала l всегда можно представить как умножение на некоторый вектор \vec{u} :

$$l(\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}).$$

Обобщение этого утверждения на бесконечномерные линейные пространства было дано одновременно Риссом и Фреше.

Теорема (M. Fréchet, F. Riesz, 1907)

Для любого ограниченного функционала l на *полном* евклидовом пространстве \mathfrak{H} найдется один единственный элемент $u \in \mathfrak{H}$, такой, что

$$l(v) = (u, v) \quad \forall v \in \mathfrak{H}.$$

Теорема о существовании и единственности

Теорема

В замыкании евклидова пространства $\mathfrak{B}(\Omega)$ найдется один единственный элемент u , такой, что

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathfrak{B}(\Omega),$$

Этот элемент называют *обобщенным решением* краевой задачи (1), а замыкание евклидова пространства $\mathfrak{B}(\Omega)$ называют *пространством Соболева*.

Теорема о корректности первой краевой задачи

Поскольку малые изменения f , то есть функционала l , приводят к малым изменениям u , мы сразу имеем:

Теорема

Первая краевая задача для уравнения Пуассона в слабой постановке является корректно поставленной, если искать решение в замыкание евклидова пространства $\mathfrak{B}(\Omega)$.

При этом относительно границы области Ω нужно предположить лишь то, что указано в теореме Грина, а относительно f – возможность интегрирования по области. Напр., можно считать Ω многоугольником, а f – кусочно-непрерывной функцией.

Классическое решение

Лемма (Герман Вейль, 1940 г.;[3], стр. 170 и сл.)

Если u – обобщенное решение и у точки $x \in \Omega$ имеется такая окрестность U_x , в которой f принадлежит $C^1(U_x)$, то u принадлежит $C^2(U_x)$.

Используя принцип продолжения через границы, как в ТФКП, можно отсюда доказать след.:

Теорема

Первая краевая задача для уравнения Пуассона непрерывно-дифференцируемой правой частью в многоугольнике Ω имеет решение, которое дважды непрерывно-дифференцируемо в самой области и на прямолинейных участках границы.

Замечание о норме $\mathfrak{B}(\Omega)$

Лемма

Для любой функции v из $\mathfrak{B}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} v^2 dx dy \leq 4\mu^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dy,$$

где $\mu = \max_{x \in \Omega} |x|$.

Отсюда в частности сразу следует использованная выше ограниченность функционала l .

Доказательство получается из тождества

$$\int_{\Omega} dx dy \frac{\partial(xv^2)}{\partial x} = \int_{\partial\Omega} d\sigma x v^2 n_x = 0.$$

См.: [3].

Вопрос № 3.

Обоснование метода конечных элементов

Ошибка МКЭ

Заменяя точное решение u на приближенное решение u_h , мы все же совершаем ошибку $\|u - u_h\|$, величину которой мы бы хотели оценить сверху через параметр h , характеризующий линейные размеры треугольников, на которые разбита область Ω .

В какой мере график функции u_h отражает качественные характеристики графика u ?

Оценка ошибки МКЭ

Теорема ([5])

Пусть Ω – выпуклый многогранник, тогда для разности точного решения u и приближенного решения u_h , найденного методом конечных элементов, справедлива оценка

$$\|u - u_h\| \leq hc \sqrt{\int_{\Omega} f^2 dx dy}$$

Здесь h – максимальная из длин сторон треугольников разбиения, а константа c зависит только от пропорций треугольников.

При увеличении числа треугольников ($h \rightarrow 0$) с сохранением их пропорций ($c = \text{Const}$) ошибку $\|u - u_h\|$ можно сделать сколь угодно малой, т.е. МКЭ сходится.

Условия на f

В теореме обычно не указывают условия на f . Дело в том, что задачи о поиске обобщенного и приближенного решений устойчивы относительно малых изменений f и, доказав неравенство для гладких f , можем перенести его на любые f , которые можно аппроксимировать гладкими функциями.

Идея доказательства

Первейшая идея этого доказательства – свести оценку ошибку МКЭ к оценке ошибки аппроксимации – была предложена в 1964 году Жаном Сеа и на тот момент выглядела вполне естественно, поскольку теория аппроксимации сплайнами была уже достаточно развита.

Однако этот подход не дает использовать гибкость понятия обобщенного решения.

Классичность решения

В качестве нормы естественно выбрать норму $\mathfrak{W}(\Omega)$:

$$\|v\| = \sqrt{\int_{\Omega} |v|^2 dx dy},$$

но в этой норме ошибку аппроксимации функции v конечным элементами можно выразить через вторые производные v . Поэтому, формулируя теорему, можно считать u – обобщенным решением, однако в ее доказательстве придется использовать *вторые производные* решения и в частности весьма специфическое неравенство Каччиополи-Ладыженской.

Шаг № 1

Лемма Сеа

Ошибка аппроксимации

Линейный оператор, ставящий в соответствие функции g сумму

$$\sum g(x_i, y_i) \varphi_i(x, y),$$

обозначают как P_h . Он однозначно определен заданием разбиения области на треугольники. Заменяя g на $P_h g$, мы совершаем ошибку $\|g - P_h g\|$, причем при изложении МКЭ мы понадеялись на ее малость, а чуть позже оценим.

Не следует путать ошибку МКЭ, то есть $\|u - u_h\|$, и ошибку аппроксимации решения, то есть $\|u - P_h u\|$.

Можно ли продолжить оператор P_h с $\mathfrak{A}(\Omega)$ на его замыкание?

Имеет ли смысл $P_h u$ для обобщенного решения u ?

Сведение ошибки МКЭ к ошибке аппроксимации

Лемма (Jean Céa, 1964)

Пусть u – решение краевой задачи, u_h – приближенное решение той же задачи, найденное методом конечных элементов, а

$$P_h u = \sum u(x_i, y_i) \varphi_i$$

– линейная комбинация базисных функций метода конечных элементов, принимающая в вершинах сетки те же значения, что и точное решение, тогда справедливо неравенство:

$$\int_{\Omega} dx dy |\nabla(u - u_h)|^2 \leq \int_{\Omega} dx dy |\nabla(u - P_h u)|^2.$$

Две задачи

Задачи о поиске точного и приближенного решения можно сформулировать единообразно.

Задача о поиске приближенного решения: требуется отыскать такой элемент $u_h \in \mathfrak{V}_h$, что

$$a(u_h, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathfrak{V}_h.$$

Задача о поиске точного обобщенного решения: требуется отыскать такой элемент $u \in \overline{\mathfrak{V}(\Omega)}$, что

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathfrak{V}(\Omega).$$

Неравенство Сеа

Для любой функции v_h из \mathfrak{H}_h справедливо неравенство

$$a(u - u_h) \leq a(u - v_h).$$

При $v = P_h u$ получаем сформулированную выше лемму Сеа.

Док-во неравенства. Положим $w_h = u_h - v_h$, тогда

$$\begin{aligned} a(u - v_h) - a(u - u_h) &= a(u - u_h + w_h) - a(u - u_h) = \\ &= 2a(u, w_h) - 2a(u_h, w_h) + a(w_h). \end{aligned}$$

Поскольку $w_h = u_h - v_h$ принадлежит $\mathfrak{H}_h \subset \mathfrak{H}$, то

- u – точное решение $\Rightarrow a(u, w_h) = l(w_h)$,
- u_h – приближенное решение $\Rightarrow a(u_h, w_h) = l(w_h)$.

Поэтому

$$a(u - v_h) - a(u - u_h) = a(w_h) \geq 0.$$

Шаг № 2

Ошибка аппроксимации

Ошибка аппроксимации в треугольнике

Пусть ABC – один из треугольников, на которые разбита область Ω , в нем $P_h u$ – линейная функция, то есть

$$P_h u = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

коэффициенты которой удовлетворяют трем условиям

$$P_h u|_A = u(A), \quad P_h u|_B = u(B), \quad P_h u|_C = u(C)$$

Параметры треугольника

Линейный размер треугольника ABC будем характеризовать величиной

$$h = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \quad (a = |BC|, b = |AC|),$$

а пропорции треугольника безразмерной величиной

$$d = \frac{|\Delta ABC|}{a^2 + b^2},$$

которая меняется в пределах от 0 до 1.

Пример

В примере № 1 мы делили квадрата на 4-ре равных треугольника. Две стороны равны $a = b = 1$, поэтому и $h = 1$; площадь треугольника равна $|\Delta ABC| = \frac{1}{2}$, поэтому

$$d = \frac{2|\Delta ABC|}{h^2} = 1.$$

При увеличении числа треугольников с сохранением пропорций $h \rightarrow 0$, а $d = 1$.

Ошибка аппроксимации в треугольнике

Лемма (Frank Natterer, 1975 г. [6])

Для любой дважды непрерывно дифференцируемой в треугольнике ΔABC функции u справедлива оценка

$$\int_{\Delta ABC} dx dy |\nabla(u - P_h u)|^2 \leq h^2 c^2 \int_{\Delta ABC} dx dy (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2),$$

где

$$c = \bar{c} \frac{1 + \sqrt{1 - d^2}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - d^2}}},$$

а константа \bar{c} лежит в пределах от 0.46 до 0.81.

Оценка ошибки аппроксимации в полигоне

Пусть исходная область Ω – полигон. Если он был разбит на треугольники, имеющие схожие размеры и пропорции, то записав неравенство Наттерера в каждом из них и сложив, получим

$$\int_{\Omega} dx dy |\nabla(u - P_h u)|^2 \leq h^2 c^2 \int_{\Omega} dx dy (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2).$$

В общем случае нужно взять в качестве h и c наибольшие среди всех треугольников.

Параметры сетки в FreeFem++

FreeFem++ позволяет легко посчитать h , но вместо безразмерной величины d он использует площадь. Напр., чтобы вычислить максимальную длину сторон и максимальную площадь треугольников, на которые мы делим эллипс, нужно добавить к Poisson-1.edp след.:

Файл Poisson-1bis.edp

```
border C(t=0,2*pi){x=1.5*cos(t); y=sin(t);}
mesh Th = buildmesh (C(20));
plot(Th, ps="Poisson-1.eps",value=true,fill=false);
fespace Nh(Th,P0);
Nh h = hTriangle;
cout << "max. diametr of triangles = " << h[].max << endl;
Nh a = area;
cout << "max. area of triangles = " << a[].max << endl;
```

Шаг № 3

Неравенство Каччиополи-Ладыженской

Неравенство Каччиополи-Ладыженской

Лемма (Каччиополи и О.А. Ладыженская, 1951 г.; [2], гл. 2, §6.)

Для решения $u \in C^2(\Omega)$ задачи (1) в выпуклой области Ω с гладкой границей справедливо след. неравенство:

$$\int_{\Omega} dx dy (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2) \leq \int_{\Omega} dx dy f^2. \quad (3)$$

Идея док-во неравенства Каччиополи-Ладыженской

В равенстве

$$\iint_{\Omega} dx dy f^2 = \iint_{\Omega} dx dy (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2u_{xx}u_{yy}),$$

нам мешает лишь одно слагаемое, в котором производные можно «перекинуть» по формуле Грина:

$$\iint_{\Omega} dx dy u_{xx}u_{yy} = \oint_{\partial\Omega} d\sigma u_x (n_x u_{yy} - n_y u_{xy}) + \iint_{\Omega} dx dy |u_{xy}|^2$$

Поэтому доказательство неравенства сводится к доказательству

$$I = \oint_{\partial\Omega} d\sigma u_x (n_x u_{yy} - n_y u_{xy}) \geq 0.$$

Знак интеграла по границе

Пусть граница $\partial\Omega$ описывается параметрически как

$$\partial\Omega : \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t = 0..1,$$

и с возрастанием t пробегается против часовой стрелки, тогда

$$I = \oint_{\partial\Omega} d\sigma u_x \left(n_y \frac{\partial}{\partial x} - n_x \frac{\partial}{\partial y} \right) u_y = \int_0^1 dt u_x \frac{du_y}{dt}.$$

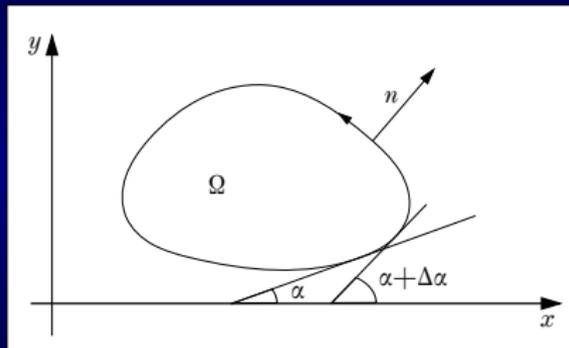
В силу условий Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_x \dot{x} + u_y \dot{y} = 0,$$

откуда

$$I = - \int_0^1 dt \frac{\dot{y}}{\dot{x}} u_y \frac{du_y}{dt} = - \frac{1}{2} \int_0^1 dt \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \frac{du_y^2}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^1 dt u_y^2 \left(\frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right).$$

Величина $\frac{\dot{y}}{x}$ представляет собой тангенс угла, образованного касательной к границе и оси Ox . Когда граница выпуклой области пробегается против часовой стрелки, эта величина все время возрастает, претерпев разрыв в той точке, где касательная параллельна оси Ox



Обобщение

Если граница состоит из нескольких гладких кусков, то интеграл по границе придется представить в виде суммы по каждому из кусков, что не изменит знака интеграла, поэтому неравенство Каччиополи-Ладыженской можно распространить на след. случай:

Допущения.

1. Область Ω представляет собой выпуклый многогранник.
2. Краевая задача допускает классическое решение u , дважды непрерывно дифференцируемое в области Ω и на прямолинейных участках ее границы.

Для доказательства существования такого решения нам и нужна лемма Вейля.

Ссылки

-  *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
-  *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
-  *Hellwig G.* Differentialoperatoren der mathematischen Physik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1964.
-  *Jean Céa.* Approximation variationnelle des problèmes aux limites. // Annales de l'institut Fourier, tome 14, no 2 (1964), p. 345-444.
-  *Johnson C.* Numerical Solution of Partial Differential equations. Cambridge, 1987.
-  *Natterer F.* Berechenbare Fehlerschranken für die Methode der Finiten Elemente. International Series of Numerical Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel. 1975. V. 28. Pp. 109—121.

Конец семинара № 8



© 2012 г., Михаил Дмитриевич Малых. Текст доступен на условиях лицензии Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.