Семинары № 7 и 8. Собственные колебания мембраны

М.Д. Малых

Материалы к симинарским занятиям на ФФ МГУ.
Версия от 25 сентября 2012 г.

Содержание

1 Поперечные колебания мембраны и задача на собственные значения

Мембраной или перепонкой называется пленка, натянутая на плоский контур, которая, подобно струне, не сопротивляется изгибу и сдвигу. Если ввести в плоскости этого контура оси Ox и Oy декартовой системы координат, то при малых поперечных колебаниях точка мембраны, имевшая в положении равновесия координаты $(x, y, 0)$, будет иметь координаты (x, y, u), причем u можно считать однозначной функцией x, y и времени t. Эта функция удовлетворяет уравнению колебаний мембраны:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \Delta u, \quad (x, y) \in \Omega, t > 0$$

где ρ – плотность, а T – натяжение мембраны. Это уравнение отличается от уравнения колебаний струны только тем, что вторая производная по x, заменена здесь лапласианом.

Замечание. – Наиболее простой вывод этого уравнения основан на принципе Гамильтона[1]; в рамках этого подхода данное выше определение мембраны и закон Гука заменяют предположением о том, что потенциальная энергия мембраны пропорциональна

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdy = \int_\Omega (u_x^2 + u_y^2) dxdy.$$

Величина эта не зависит от выбора декартовой системы координат и в некотором смысле характеризует степень изогнутости мгновенного профиля. Элементарный вывод этого уравнения, повторяющий вывод уравнения малых колебаний струны, приведен в [ТС]. Наконец, это уравнение можно вывести из общих уравнений колебания упругих тел[2].

Под собственными колебаниями мембраны понимают такое ее движение, когда u зависит от времени след. образом:

$$u = u(x, y) \sin(\omega t + \theta). \tag{1}$$

[1] См., напр., Гильберт-Курант. Уравнения математической физики, т. I, гл. IV, §10, п. 3.

[2] Франк-Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Гл. IX, §3, п. 1

Опытным путем можно наблюдать, что собственные колебания возникают не при всех частотах, но лишь при дискретном их наборе. Однако, если в случае струны эти частоты образуют гармонический ряд

$$\omega_1,\, 2\omega_1,\, 3\omega_1, \ldots,$$

то теперь это распределение может оказаться весьма затейливым. В музыкальной акустике термин гармоники употребляют только по отношению к собственным колебаниям, частоты которых образуют гармонический ряд, коль скоро он лежит в основе всякой музыкальной гармонии, однако теперь часто этот термин употребляют как синоним собственных функций. Еще одна легко наблюдаемая характеристика собственных колебаний мембран – узловые линии. Именно, если посыпать мембрану песком, то он или вовсе скатиться с мембраны, или выстроится вдоль линии, точки которых неподвижны, то есть вдоль линии $u(x, y) = 0$, которую называют узловой линией функции u. В результате возникают т.н. звуковые фигуры, которые легко наблюдать на опыте; впервые они были описаны Хладни (Ernst Chladni).[3]

Подставив выражение (1) в уравнение движения и вспомнив, что границы мембраны закреплены, мы получим задачу на собственные значения: найти такие значения параметра λ, при которых задача

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

имеет нетривиальное решение u; как и в теории матриц такие λ называют собственными значениями задачи (2), соответствующие им решения – собственными функциями. При этом каждому собственному значению λ отвечает собственное колебание мембраны с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{T\lambda}{\rho}} \tag{3}$$

[3]Хладни наблюдал такие фигуры не на перепонках, а на металлических пластинах с закрепленным центром. Детально образование фигур Хладни можно увидеть в прекрасном фильме «Chladni Plates», снятом Harvard Natural Sciences Lecture Demonstrations, июль 2011.

и мгновенным профилем

$$u = u(x, y)\sin(\omega t + \theta),$$

где u – собственная функция, отвечающая собственному значению λ, а θ – фаза, которая может быть взята произвольным образом.

2 Свойства собственных функций и собственных значений

1. Собственные значения равных областей равны, при увеличении линейного размера в k раз, собственное значение уменьшается в k^2 раз, то есть является величиной размерности l^{-2}.

2. *Все собственные значения задачи* (2) – *положительны*, поэтому в частности в (3) корень не может дать комплексных значений. Для доказательства, умножим (2) на u и интегрируем по Ω:

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta u dxdy = -\lambda \int\limits_{\Omega} u^2 dxdy,$$

но в силу теоремы Гаусса-Остроградского

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta u dxdy = \int\limits_{\Omega} u\mathrm{div}(\nabla u)dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma - \int\limits_{\Omega}(\nabla u, \nabla u)dxdy =$$
$$= -\int\limits_{\Omega}(\nabla u, \nabla u)dxdy,$$

поэтому последнее равенство можно переписать в виде

$$\lambda = \frac{\int\limits_{\Omega}(\nabla u, \nabla u)dxdy}{\int\limits_{\Omega} u^2 dxdy}.$$

Это выражение неотрицательно и может быть равно нулю, только если $\nabla u = 0$ во всей Ω. Последнее же в союзе с граничными условиям $u = 0$ на $\partial\Omega$ дает $u = 0$ всюду, хотя собственная функция по определению не может быть всюду равна нулю.

3. Двум различным собственным значениям, скажем λ и μ, отвечают собственные функции u и v, которые ортогональны в том смысле, что

$$\int\limits_{\Omega} uv dxdy = 0.$$

В самом деле, умножая (2) на v и интегрируя по Ω, получим

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u dxdy = \lambda \int\limits_{\Omega} uv dxdy;$$

но в силу теоремы Гаусса-Остроградского

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u dxdy = \int\limits_{\Omega} v \operatorname{div}(\nabla u) dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int\limits_{\Omega} (\nabla v, \nabla u) dxdy =$$

$$= \int\limits_{\Omega} u\Delta v dxdy = -\mu \int\limits_{\Omega} uv dxdy,$$

поэтому последнее равенство дает, что

$$(\lambda - \mu) \int\limits_{\Omega} uv dxdy = 0.$$

4. Одному собственному значению отвечает конечное число линейно независимых собственных функций, это число называют *кратностью собственного значения.* Все собственные значения с учетом кратности можно перенумеровать в порядке возрастания и составить всегда бесконечный ряд

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \dots,$$

причем

$$\lambda_n \approx \frac{4\pi}{|\Omega|} n \quad (n \to +\infty). \tag{4}$$

5. Если сопоставить каждому собственному значению ряда

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \dots,$$

по одной собственной функции, условившись брать для повторяющихся собственных значений ортогональные собственные функции, получится система собственных функций

$$u_1,\ u_2, u_3, \dots,$$

элементы которого ортогональны друг другу в силу второго свойства:

$$\int\limits_{\Omega} u_m u_n dxdy = 0 \quad (n \neq m).$$

Эта система полна в том смысле, что любую функцию f, определенную в области Ω, можно разложить в ряд вида

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(x,y),$$

где

$$f_n = \frac{\int\limits_{\Omega} f u_n dxdy}{\int\limits_{\Omega} u_n^2 dxdy}.$$

Это утверждение, очевидно, является обобщением теоремы В.А. Стеклова. Выписанный ряд для кусочно-непрерывных функций сходится в том смысле, что

$$\int\limits_{\Omega} \left| f - \sum_{n=1}^{N} f_n u_n(x,y) \right| dxdy \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.$$

В этом случае говорят о сходимости в среднем (ср. стр. **??**).

Последние два свойства весьма схожи со свойствами собственных значений и собственных векторов самосопряженных матриц и могут быть доказаны в самом общем виде для бесконечных матриц.[4]. Классическое доказательство, основанное на методе интегральных уравнений, можно найти в [1], гл. VIII, §1.

Дом. задание. Справедливы ли свойства 1-3 для задачи

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} ?$$

[4]См. теорему о спектральном разложении для вполне непрерывных операторов, напр., в Лекциях по функциональному анализу Ф. Рисса и Б. Секефальви-Надя, гл. VI; о ее применении к рассматриваемой задаче на собственные значения см. Ладыженская О.А. Гл. II, §4.

3 Вычисление собственных значений методом конечных элементов

Для приближенного решения задачи (2) можно воспользоваться МКЭ. Итак, пусть область Ω разбита на треугольники и с каждой внутренней вершиной связана кусочно линейная функция $\varphi_i(x, y)$. Приближенное решение будем искать в виде

$$u_h(x, y) = \sum u_i \varphi_i(x, y).$$

Не имея возможности подставить это выражение в (2) прямо, запишем это последнее в «слабой форме» как тождество

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx dy = \lambda \int\limits_{\Omega} u v dx dy,$$

верное для любой функции v, обращающейся в нуль на границе Ω, и примем, что u_h удовлетворяет ему не при всех v, но хотя бы при $v = \varphi_i$

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla u_h, \nabla \varphi_i) dx dy = \lambda \int\limits_{\Omega} u_h \varphi_i dx dy \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Отсюда для отыскания столбца коэффициентов $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)^T$ получим матричную задачу на собственные значения

$$\mathfrak{A}\mathfrak{u} = \lambda \mathfrak{B}\mathfrak{u},$$

где $\mathfrak{A}$ уже знакомая нам разреженная симметрическая матрица, элементами которой служат интегралы

$$a_{ij} = \int\limits_{\Omega} (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) dx dy,$$

а $\mathfrak{B}$ – тоже симметрическая разреженная матрица, элементами которой служат

$$b_{ij} = \int\limits_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx dy.$$

Поскольку матрицы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – симметрические и положительно определенные, то, как известно из курса линейной алгебры, задача на собственные значения

$$\mathfrak{A}\mathfrak{u} = \lambda \mathfrak{B}\mathfrak{u}$$

имеет ровно N собственных значений (с учетом кратности) $\{\lambda_i^h\}$, которые все положительны. При небольшом числе треугольников в разбиении эти числа можно найти как корни характеристического уравнения

$$\det |\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{B}| = 0;$$

при больших N, однако, даже вычисление определителей представляет определенные трудности, которые успешно обходят, используя разреженность матриц.

Собственным значениям отвечают N собственных векторов $\{\mathfrak{u}^{(i)}\}$, образующих базис, то есть любой столбец длины N можно представить как линейную комбинацию этих столбцов. Это означает, что любую функцию

$$v_h = \sum_{j=1}^{N} v_j \varphi_j(x, y)$$

можно представить как линейную комбинацию функций

$$u_h^{(i)} = \sum_{j=1}^{N} u_j^{(i)} \varphi_j(x, y),$$

то есть приближенные собственные функции $u_h^{(i)}$ образуют базис пространства $\mathfrak{H}_h$. Теперь не трудно видеть, что свойства 4-5 получаются из соответствующих теорем линейной алгебры путем предельного перехода $h \to 0$.

Дом. задание. Докажите, что приближенные собственные функции $u_h^{(i)}$ ортогональны в смысле свойства 5 пред. параграфа.

4 Первое собственное значение

Как и в случае струны, высоту звука, возникающего при ударе по мембране, определяет наименьшая из собственных частот, при которой все точки мембраны приходят в движение. Иными словами, *первое собственное* *значение λ_1 всегда однократно и ему отвечает собственная функция u_1, не имеющая узловых линий, а все прочие собственные функции их обязательно имеют.* Это утверждение было строго доказано Р. Курантом в 1930-х на основе разработанного им принципа минимакса[5], уклонившись от его изложения, найдем первые собственные значения простых областей и опишем соответствующие им собственные функции.

4.1 Первое собственное значение круга

Начнем со случая, когда Ω – круг радиуса a. МКЭ в союзе со свойством 1 сразу дают, что

$$\lambda_1 = \frac{5.78\ldots}{a^2},$$

а график u_1 имеет вид колокола (см. рис. 5). Оба эти утверждения можно получить аналитически след. образом.

Перейдем в полярную систему координат с центром в центре круга. Поскольку поворот на любой угол переводит круг сам в себя, вмести с $u_1(r,\varphi)$ собственной функцией будет и $u_1(r,\varphi + \mathrm{const})$. Но собственная функция, отвечающая первому собственному значению, всегда однократна, поэтому $u_1(r,\varphi + c_1) = c_2 u_1(r,\varphi)$. Норма

$$\int\limits_\Omega u_1^2 dxdy$$

не меняется при поворотах, поэтому $c_2 = 1$, а значит

$$u_1(r,\varphi + c_1) = u_1(r,\varphi)$$

и поэтому *первая собственная функция круга не зависит от φ.*

Подставляя $u = u(r)$ в (2) и переходя в полярные координаты, получим

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) + \lambda u = 0 \\ |u|_{r=0}| < \infty, \quad u|_{r=a} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

[5] Гильбрет-Курант. Т. I, гл. VI, §6.

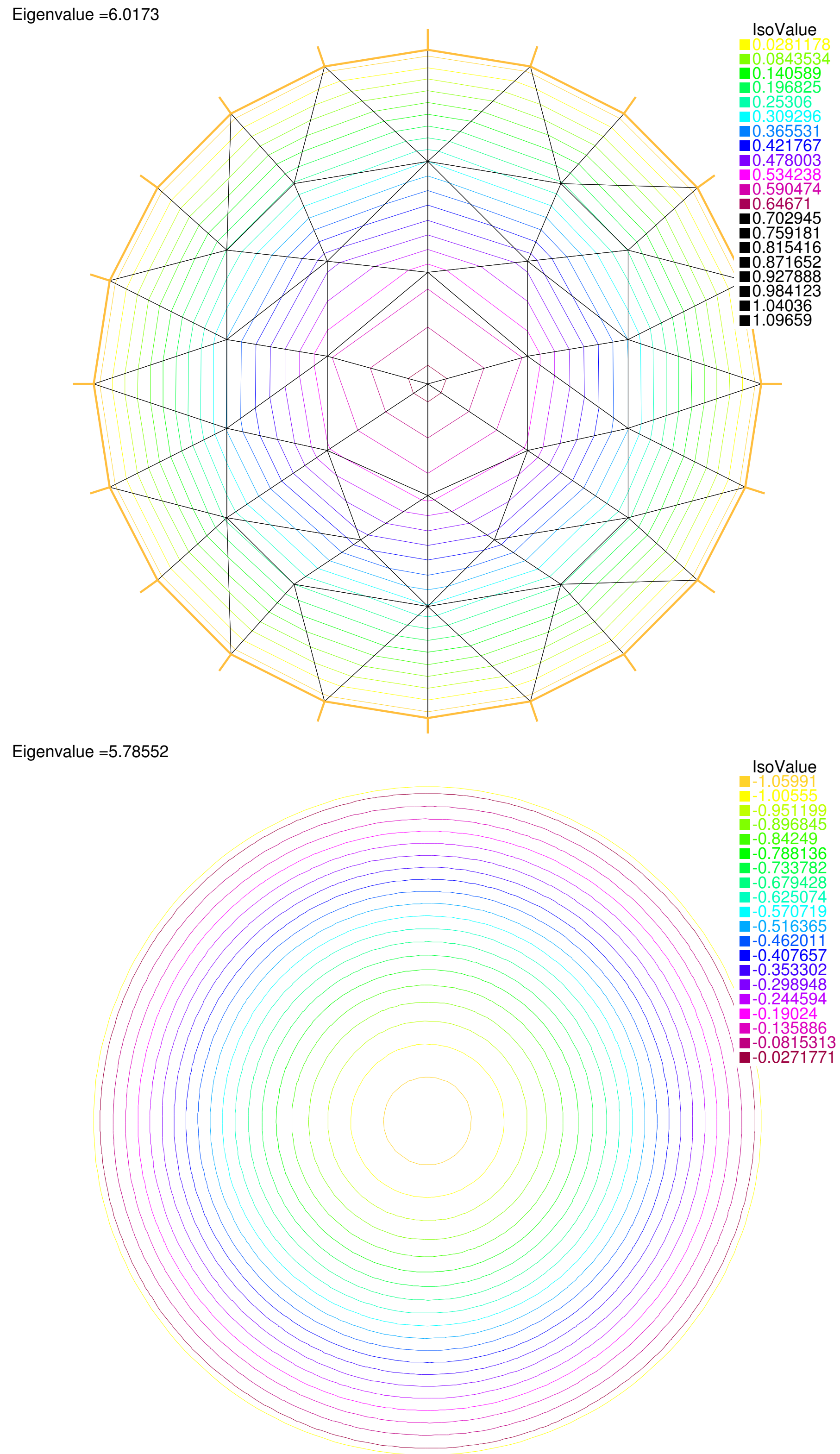


Рис. 1: Первая собственная функция единичного круга, вычисленная МКЭ. На верхнем рисунке взято 20 вершин на границе, на нижнем 200. Получающиеся значения для λ_1 можно сравнить с точным $\lambda_1 = 5.7831\ldots$.

Если бы можно было указать два частных решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

названного в честь Бесселя *уравнением Бесселя нулевого порядка*, скажем y_1 и y_2, то

$$u = C_1 y_1(\sqrt{\lambda}r) + C_2 y_2(\sqrt{\lambda}r),$$

тогда константы C_1 и C_2 можно было бы как в случае струны определить двух граничных условий, а λ из условии разрешимости системы уравнений для C_1 и C_2.

В XVIII - нач. XIX веков предпринимались многочисленные попытки решить уравнение Бесселя в элементарных функциях, пока в середине 1830-х годов Лиувилль не доказал невозможность такого представления.[6] Впрочем, подметив некоторое сходство этого уравнения с уравнением Эйлера

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{b}{x^2}y = 0,$$

частные решения которого ищут в виде $y = x^r$, можно попробовать искать решения уравнения Бесселя в виде

$$y = x^r(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots) \quad (c_0 \neq 0).$$

Подставив это выражение в уравнение Бесселя, получим

$$x^r\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)c_nx^n + x^r\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)c_nx^n + x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+2} = 0,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при x^n нулю, имеем

$$\begin{cases} r(r-1)c_0 + rc_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0 \\ (r+1)rc_1 + (r+1)c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0 \\ (r+n)(r+n-1)c_n + (r+n)c_n + c_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

т.е. рекуррентные формулы для отыскания коэффициентов

$$\begin{cases} c_0 \neq 0,\ c_1 = 0, \\ c_n = -\frac{c_{n-2}}{n^2} \quad n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

[6]Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Т. 1, гл. II.

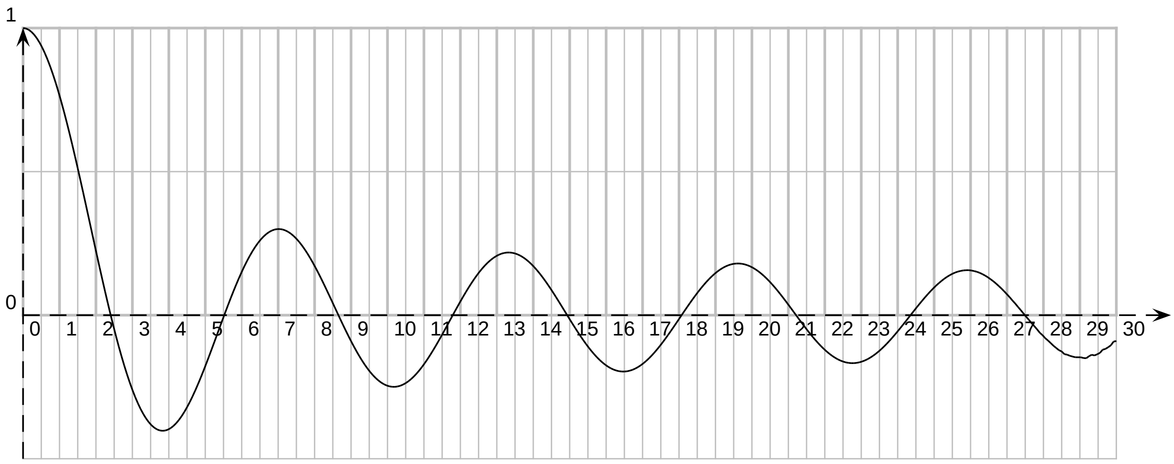


Рис. 2: График функции Бесселя $J_0(x)$; для построения использовано 40 первых членов ряда.

В данном случае совсем не трудно превратить их в явные формулы: все коэффициенты при нечетных степенях x равны нулю, а

$$c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{2^2 k^2} = +\frac{c_{2k-4}}{2^4 k^2 (k-1)^2} = \cdots = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} c_0.$$

Таким образом, нам удалось построить решение вида

$$y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}.$$

По признаку Даламбера этот степенной ряд сходится при всех x, поэтому это формально построенное решение действительно удовлетворяет уравнению Бесселя.

Таким образом, *уравнение Бесселя нулевого порядка имеет решения, аналитические во всей комплексной плоскости.* То из них, которое принимает значение 1 в нуле называется *функцией Бесселя нулевого порядка*, обозначается как $J_0(x)$ и дается рядом

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Эту функцию традиционно не причисляют к элементарным функциям, но лишь к более широкому классу трансцендентных функций – специальным функциям математической физики.

Ограничившись первыми N членами этого ряда, мы можем вычислить $J_0(x)$ при $|x| < L$ с ошибкой, которую можно оценить сверху как

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{L}{2}\right)^{2k};$$

первый член этого ряда можно оценить как

$$\frac{1}{(N+1)!^2} \left(\frac{L}{2}\right)^{2(N+1)},$$

второй – как

$$\frac{1}{(N+1)!^2} \left(\frac{L}{2}\right)^{2(N+1)} \left(\frac{L}{2(N+2)}\right)^2,$$

третий как

$$\frac{1}{(N+1)!^2} \left(\frac{L}{2}\right)^{2(N+1)} \left(\frac{L}{2(N+2)}\right)^4$$

и так далее, то есть эти члены убывают быстрее, чем члены геометрической прогрессии с

$$q = \frac{L}{2(N+2)},$$

а значит, выбрав

$$L < 2(N+2),$$

мы можем оценить ошибку сверху как

$$\frac{1}{(N+1)!^2} \left(\frac{L}{2}\right)^{2(N+1)} \frac{1}{1 - \frac{L}{2(N+2)}}.$$

Напр., ограничившись первыми 40 членами и взяв для определенности

$$L = 30 < 84,$$

чего для наших целей вполне достаточно, мы совершим ошибку 4×10^{-3}. Это позволяет построить график $J_0(x)$ (рис. 2). Однако, что несмотря на сходимость ряда при всех x, увеличение числа членов не способствует исчезновению болтанки, начинающейся у $x = 29$. Ее появление связано с ошибками округления, проистекающими от деления больших чисел x^{2N} и $N!^2$. Поэтому на практике этот ряд можно использовать для вычисления $J_0(x)$ при небольших x. Разумеется, нынче в большинстве математических пакетов имеется встроенная процедура вычисления $J_0(x)$.[7]

Поскольку коэффициенты уравнения Бесселя в нуле имеет особенность, любое решение, линейно независимое с J_0, обязательно имеет особенность в нуле[8]. Поэтому с точностью до мультипликативной константы функция J_0 – единственное решение уравнения Бесселя, не имеющее особенности в нуле. Это позволяет, вернувшись к исходной задаче (5), сразу заметить, что только функция

$$u = CJ_0(\sqrt{\lambda}r)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению и условию ограниченности в нуле. Условие же на границе $r = a$ дает уравнение для отыскания собственного значения:

$$J_0(\sqrt{\lambda}a) = 0. \tag{6}$$

Как видно на рис. 2, функция Бесселя имеет положительные нули; их нумеруют в порядке возрастания и обозначают как

$$j_{0,1},\ j_{0,2}, \dots .$$

[7]Напр., SF24R в Библиотеке Численного Анализа НИВЦ МГУ, где используются два разных алгоритма, один – для $x < 4$, а другой – для $x > 4$.

[8]Строгое доказательство этого утверждения опирается на теорию линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентам. Поскольку в уравнении Бесселя коэффициент при y' равен $\frac{1}{x}$, определитель Вронского любой системы линейно независимых решений уравнения Бесселя равен

$$y_1y_2' - y_2y_1' = \mathrm{Const.}\exp\left(-\int\frac{dx}{x}\right) = \frac{C_1}{x},$$

откуда

$$\frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1} = \frac{C_1}{y_1^2 x}$$

и при $y_1 = J_0(x)$ имеем

$$y_2 = J_0(x)\left(C_1\int\limits_1^x\frac{d\xi}{\xi J_0(\xi)^2} + C_2\right),$$

Поскольку $J_0(0) = 1$, выписанный интеграл имеет логарифмическую особенность в нуле. См. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям, §12.

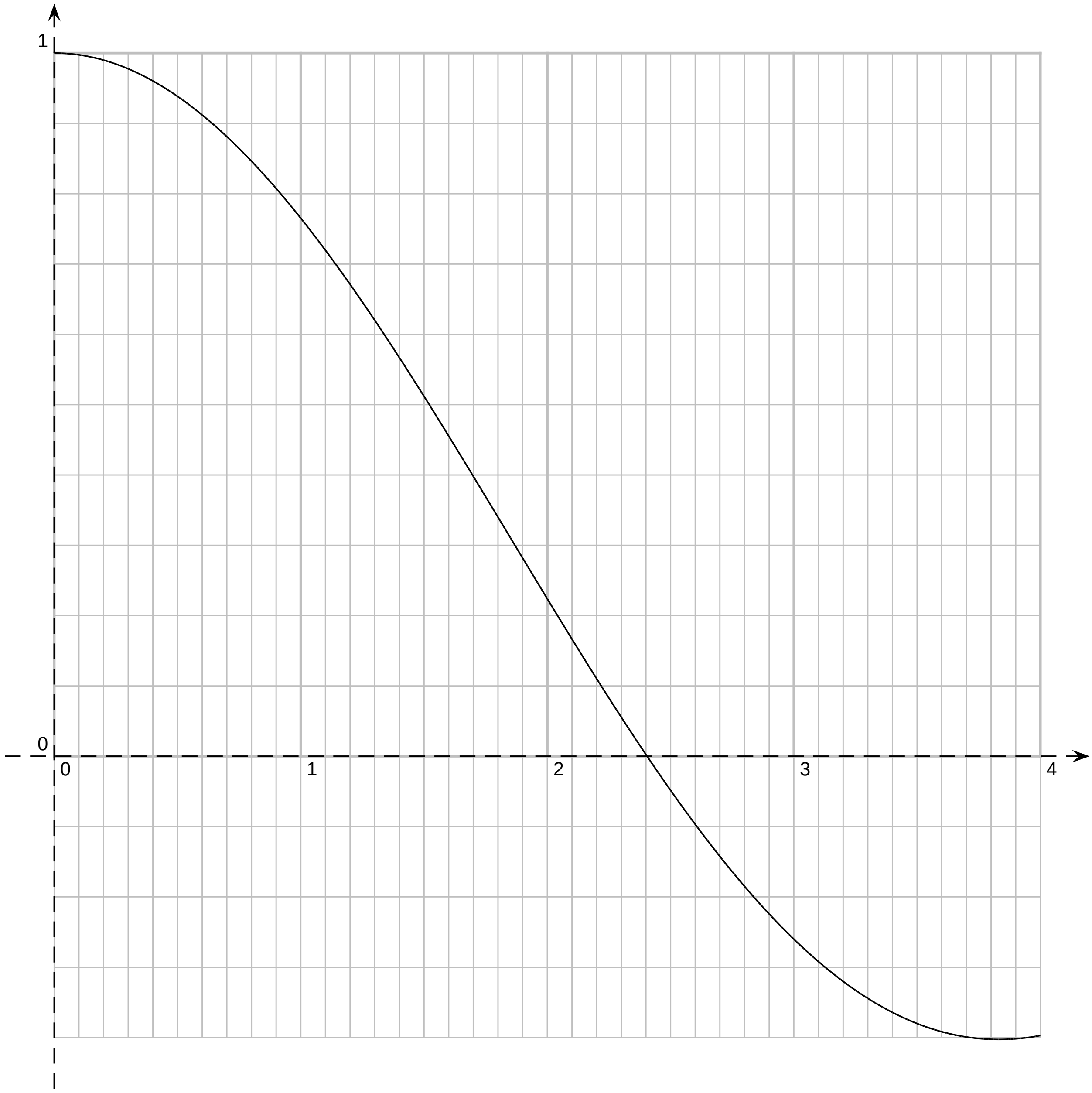


Рис. 3: К определению первого нуля функции Бесселя $J_0(x)$, ср. табличное значение $j_{0,1} = 2.40483$.

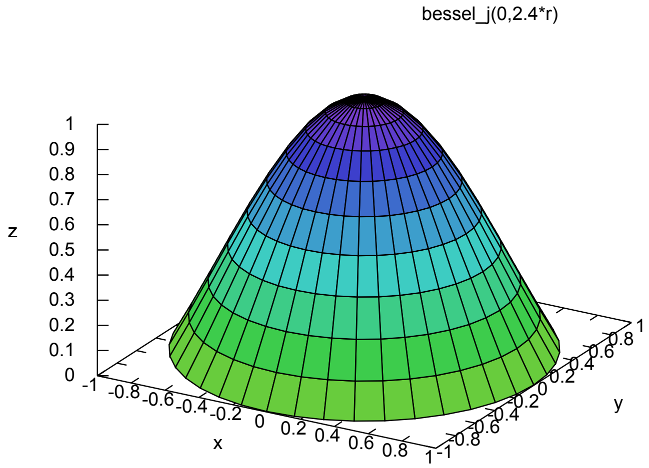


Рис. 4: Первая собственная функция единичного круга, вычисленная по формуле $u_0 = J_0(j_{0,1}r)$.

К сожалению, эти числа не удалось вычислить в конечном виде, то есть выразить в виде отношения целых чисел или, скажем, через известные трансцендентные числа[9]. Однако эти числа легко найти графически, напр., по рис. 3 видно, что $j_{0,1} \approx 2.4$. С удивительно хорошей точностью их можно найти штатными средствами `Giac`:

$\boxed{1}$
```
restart; J0:=sum((-1)^k*x^(2*k)/(2^(2*k)*(k!)^2) ,k=0..40);
```

$$[\text{J0}, \text{“x“}, \text{j0}], 1 - \left(\frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^4}{64} - \left(\frac{x^6}{2304}\right) + \frac{x^8}{147456} - \left(\frac{x^{10}}{14745600}\right) + \ldots]$$

$\boxed{2}$
```
j0:=fsolve(J0,x=2..30);
```

$$[2.404826, 5.520078, 8.653728, 11.791534, 14.930918, 18.071064, 21.211637, 24.352516, 27.492205]$$

Для сравнения: согласно `wolframalpha.com`

$$j_{0,1} = 2.4048255576957727686216318793264546431242449\ldots$$

$$j_{0,9} = 27.493479132040254795877288234607414546529568\ldots$$

Возвращаясь к 6, можем утверждать следующее: *первое собственное значение круга*

$$\lambda_1 = \frac{j_{0,1}^2}{a^2}\frac{5.7831\ldots}{a^2},$$

[9] Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Т. 1. §15.28

частота

$$\omega_1 = \frac{2.4048\ldots}{a}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

им отвечает собственная функция

$$u_1 = J_0(j_{0,1}r/a).$$

Мультипликативную константу обычно опускают, поскольку всякая собственная функция определена с точностью до такой константы. График собственной функции визуально мало отличается от параболоида вращения с центром в нуле (см. рис. 4).

4.2 Первое собственное значение прямоугольника

Пусть Ω – прямоугольник со сторонами a и b. Поместим начало декартовой системы координат в его левый нижний угол и направим оси вдоль сторон прямоугольника. Поскольку в декартовой системе координат лапласиан распадается на сумму

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

можно попытаться искать собственную функцию в виде

$$u = X(x)Y(y).$$

Подставляя в (2) это выражение, получим

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda XY = 0,$$

разделяя переменные, это равенство можно переписать так

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y) + \lambda Y(y)}{Y(y)}.$$

Левая часть этого равенства зависит разве только от x, права – разве только от y, поэтому на самом деле обе не зависят ни от x, ни от y. Отсюда

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y) + \lambda Y(y)}{Y(y)} = \mathrm{Const}.$$

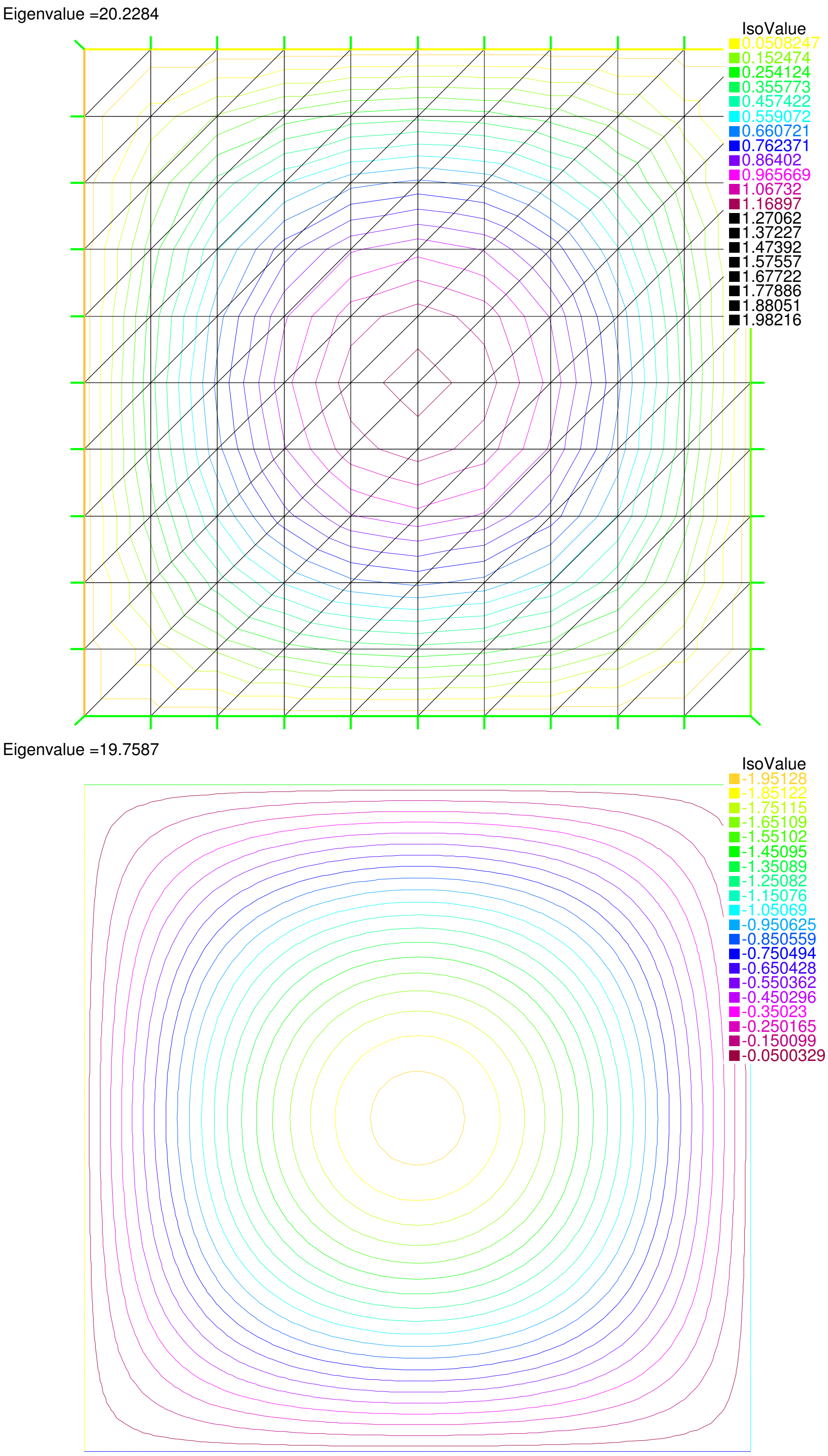


Рис. 5: Первая собственная функция единичного квадрата, вычисленная МКЭ. Получающиеся значения для λ_1 можно сравнить с точным $\lambda_1 = 2\pi^2 = 19.7392\ldots$.

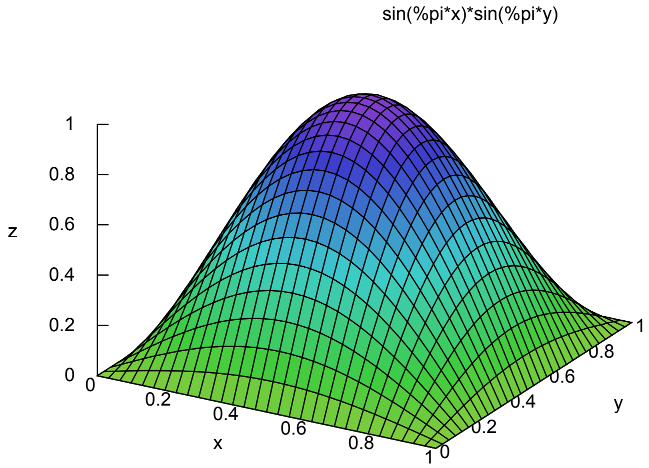


Рис. 6: Первая собственная функция единичного квадрата, вычисленная по точной формуле.

Обозначая константу как μ и вспоминая про граничные условия, имеем

$$\{X'' - \mu X = 0, \quad X(0) = X(a) = 0.$$

Эта одномерная задача на собственные значения, она имеет решения только при $\mu = -\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$ $(n \in \mathbb{N})$, и тогда решением будет $X = \sin\frac{\pi n x}{a}$. Но тогда для Y получается задача

$$\{Y'' + (\lambda - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2)Y = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0$$

которая имеет решение только при

$$\lambda - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 = \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 \quad (m \in \mathbb{N})$$

и решение это – $Y = \sin\frac{\pi m y}{b}$. Таким образом, задача на собственные значения (2) в прямоугольнике $a \times b$ имеет собственными значениями числа

$$\lambda = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 \quad (m,\, n \in \mathbb{N}),$$

и каждому из них отвечает собственная функция

$$u = \sin\frac{\pi n x}{a}\sin\frac{\pi m y}{b}.$$

В этом семействе имеется только одна функция, не имеющая узловых линий, та, которая отвечает $n = m = 1$. Поэтому *наименьшее собственное значение задачи* (2) *в прямоугольнике* $a \times b$ *равно*

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2,$$

ему отвечает собственная функция

$$u_1 = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

В частности, в квадрате $a \times a$

$$\lambda_1 = \frac{2\pi^2}{a^2} = \frac{19.7392\ldots}{a^2}, \quad u_1 = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}.$$

При повороте на $\pi/2$ квадрат переходи сам в себя, также ведет себя и первая собственная функция.

4.3 Первая собственная функция равностороннего треугольника

Пусть теперь Ω – равносторонний треугольник со сторонами, равными a. В декартовой системе координат его стороны можно описать уравнениями

$$y = \sqrt{3}x, \quad y = -\sqrt{3}x, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}a;$$

следуя аналогии с задачей в квадрате, из синусов можно составить произведение, обращающееся в нуль на этих прямых:

$$u = 4\sin(\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}y)\sin k(y-\sqrt{3}x)\sin k(y+\sqrt{3}x).$$

Покажем, что константу k можно подобрать таким образом, чтобы отношение $\Delta u : u$ не зависело от x и y.

Именно, это выражение можно представить как сумму синусов:

$$\begin{aligned} u &= 2\sin(\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}y)[\cos 2k\sqrt{3}x - \cos 2ky] = \\ &= \sin 2(k\sqrt{3}x + \frac{\pi}{\sqrt{3}a}y) + \sin 2(k\sqrt{3}x - \frac{\pi}{\sqrt{3}a}y) \\ &+ \sin 2(k + \frac{\pi}{\sqrt{3}a})y + \sin 2(k - \frac{\pi}{\sqrt{3}a})y \end{aligned}$$

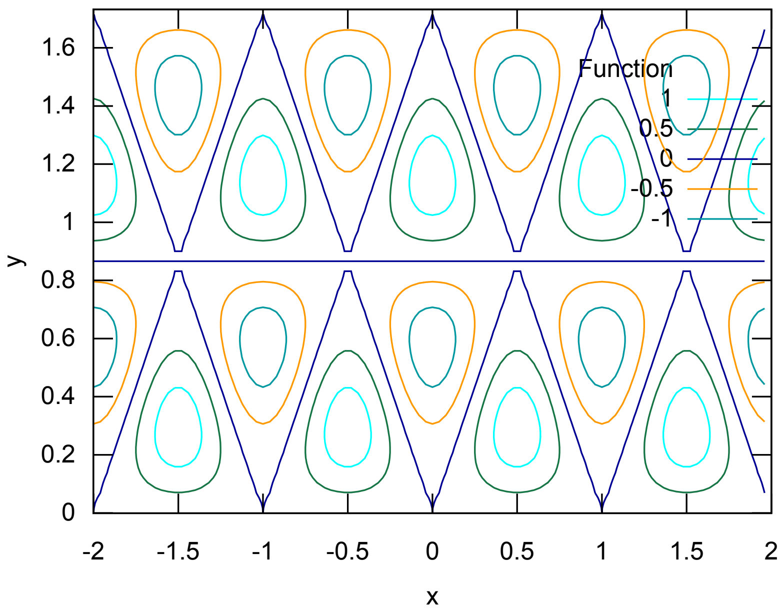


Рис. 7: Линии уровня для функций u.

при этом

$$\Delta \sin 2(k\sqrt{3}x \pm \frac{\pi}{\sqrt{3}a}y) = -4(3k^2 + \frac{\pi^2}{3a^2}) \sin 2(k\sqrt{3}x \pm \frac{\pi}{\sqrt{3}a}y)$$

и

$$\Delta \sin 2(k \pm \frac{\pi}{\sqrt{3}a})y = -4(k \pm \frac{\pi}{\sqrt{3}a})^2 \sin 2(k \pm \frac{\pi}{\sqrt{3}a})y$$

поэтому u будет собственной функцией, только если

$$k = \frac{\pi}{\sqrt{3}a};$$

но тогда

$$u = \sin 2(\frac{\pi}{a}x + \frac{\pi}{\sqrt{3}a}y) + \sin 2(\frac{\pi}{a}x - \frac{\pi}{\sqrt{3}a}y) + \sin \frac{4\pi}{\sqrt{3}a}y$$

и

$$\Delta u = -4\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{3a^2}\right) u = -\frac{16\pi^2}{3a^2}u.$$

Поэтому, функция

$$u = \sin(\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}y) \sin \frac{\pi}{\sqrt{3}a}(y - \sqrt{3}x) \sin \frac{\pi}{\sqrt{3}a}(y + \sqrt{3}x).$$

является нетривиальным решением (2) в треугольнике при $\lambda = \frac{16\pi^2}{3a^2}$. Остается заметить, что эта функция не обращается в нуль в треугольнике (см. рис. 7), поэтому первой собственной функцией. В итоге: *первое собственное значение равностороннего треугольника со стороной* a *равно*

$$\lambda_1 = \frac{16\pi^2}{3a^2}.$$

Ему отвечает собственная функция, которая является произведением трех синусов.

4.4 Неравенства Релея

Лорд Релей заметил, что среди областей равной площади круг издает самый низкий звук, то есть первое собственное значение произвольной области Ω может быть оценено снизу:

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi}{|\Omega|} j_{0,1}^2,$$

где $j_{0,1}^2 = 5.78\ldots$ – первое собственное круга единичного радиуса, причем равенство имеет место только тогда, когда область является кругом. Напр., для правильного треугольника единичной площади

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}} = 22.8\ldots;$$

для прямоугольника $a \times b$ единичной площади

$$ab = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} = \pi^2(a^2 + a^{-2});$$

λ_1 минимальна при $a = 1$ и там равна $2\pi^2 = 19.7\ldots$, что больше $\pi j_{0,1}^2 = 18.1\ldots$. Строго неравенство Релея было доказано одновременно Фабером и Краном в 1920-х годах.

Дом. задание. Уравнение Бесселя

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}y = 0 \quad (\nu \geq 0)$$

имеет два линейно независимых решения. Первое из них не имеет в нуле особенности, называется функцией Бесселя ν-го порядка и обозначается как $J_\nu(x)$. Второе, напротив, обращается в бесконечность при $x \to +0$, называется функцией Неймана и обозначается как $N_\nu(x)$. Используя эти функции, найдите

1. первое собственное значение сектора раствора α круга радиуса a, ср. [БК], гл. II, §6;
2. первое собственное значение кольца $a < r < b$, ср. [БК], гл. II, §7.

5 Старшие собственные значения

Собственные функции, отвечающие собственным значениям, отличным от первого, обязательно имеют узловые линии и более того, обязательно меняют знак внутри области, поскольку для знакопостоянной функции u выражение

$$\int\limits_{\Omega} u_1 u dx dy$$

не может быть равно нулю (ср. свойство 3). Куранту удалось доказать, что узловая линия собственной функции u_n делит область не более чем на n частей.

5.1 Собственные значения круга

Пусть u – какая любо собственная функция круга радиуса a. Для ее отыскания можно применить тот же примем, что и при решении краевых задач для уравнения Лапласа.

Коль скоро эта функция не имеет разрывов в круге, в полярно системе координат ее можно считать периодической функцией φ и следовательно, разложить в ряд Фурье

$$u = \frac{u_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r) \cos n\varphi + v_n(r) \sin n\varphi,$$

коэффициенты которого даются формулами

$$u_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(r,\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \ldots$$

Умножая $\Delta u + \lambda u = 0$ на $\cos n\varphi$ и интегрируя по φ, получим

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r u \cos(n\varphi) d\varphi + \frac{1}{r^2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cos(n\varphi) d\varphi + \lambda \int\limits_0^{2\pi} u \cos(n\varphi) d\varphi = 0$$

или

$$\frac{1}{r}(ru_n')' - \frac{n^2}{r^2}u_n + \lambda u_n = 0.$$

Таким образом, коэффициенты u_n, равно как и v_n должны удовлетворять сингулярной задаче на собственные значения:

$$\begin{cases} R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0, \\ R(a) = 0, \quad |R(0)| < \infty \end{cases}$$

Возникшее здесь дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - n^2}{x^2}y = 0,$$

называют *уравнением Бесселя n-го порядка*. Одно его решение, как и в случае $n = 0$, можно найти в виде

$$y = x^r(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots) \quad (c_0 \neq 0).$$

В самом деле, подставив это выражение в уравнение Бесселя, получим

$$x^r\sum_{m=0}^{\infty}(r+m)(r+m-1)c_mx^m + x^r\sum_{m=0}^{\infty}(r+m)c_mx^m + x^r\sum_{m=0}^{\infty}(c_{m-2} - n^2c_m)x^m = 0,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при x^m нулю, имеем

$$\begin{cases} r(r-1)c_0 + rc_0 - n^2c_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm n \\ (r+1)rc_1 + (r+1)c_1 - n^2c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0 \\ (r+m)(r+m-1)c_m + (r+m)c_m + c_{m-2} - n^2c_m = 0, \quad m = 2, 3, \dots \end{cases}$$

т.е. рекуррентные формулы для отыскания коэффициентов

$$\begin{cases} c_0 \neq 0,\ c_1 = 0, \\ c_m = -\frac{c_{m-2}}{(r+m)^2 - n^2} \quad m = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Хорошо видно, что при $r = -n$ знаменатель в рекуррентной формуле однажды обратиться в нуль и поэтому можно брать лишь корень $r = n$. Тогда

$$\begin{cases} c_0 \neq 0,\ c_1 = 0, \\ c_m = -\frac{c_{m-2}}{(n+m)^2 - n^2} = -\frac{c_{m-2}}{m(m+2n)} \quad m = 2, 3, \dots \end{cases}$$

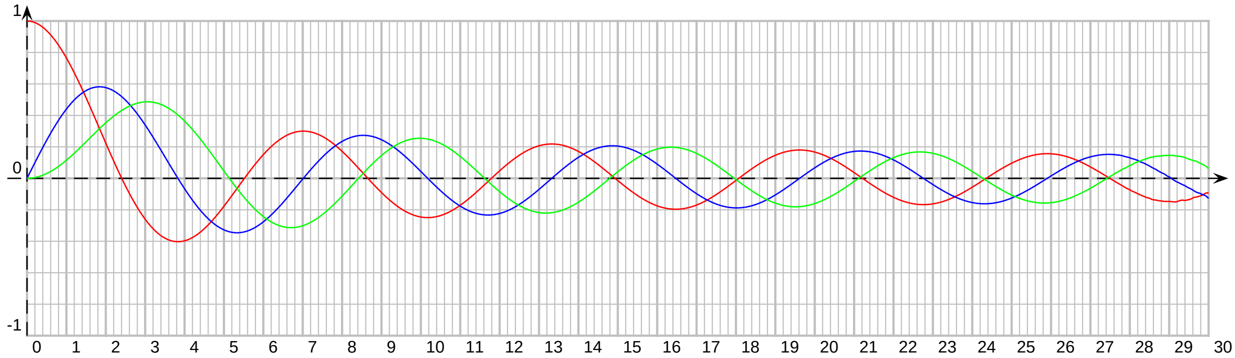


Рис. 8: График функции Бесселя $J_0(x)$ (красный), $J_1(x)$ (синий) и $J_2(x)$ (зеленый); для построения использовано 100 первых членов ряда.

Поэтому все коэффициенты при нечетных степенях x равны нулю, а при четных

$$c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{2^2 k(k+n)} = +\frac{c_{2k-4}}{2^4 k(k-1)(k+n)(k+n-1)} = \dots =$$
$$= \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k+n)\dots(n+1)} c_0.$$

Таким образом, нам удалось построить решение в виде ряда

$$y = c_0 x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k+n)\dots(n+1)} x^{2k},$$

сходящегося по признаку Даламбера при всех x. Константу c_0 для удобства записи ряда принимают равной

$$c_0 = \frac{1}{2^n n!}.$$

Таким образом, *уравнение Бесселя n-го порядка имеет решение, аналитические во всей комплексной плоскости*, а именно

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Его называют функцией Бесселя n-го порядка. Полученное выражение в виде ряда дает возможность в интересующей нас области построить график этой функции (рис. 8).

Второе, линейно независимое с функцией Бесселя решение, имеет в нуле особенность, поэтому

$$u_n = a_n J_n(\sqrt{\lambda} r), \quad v_n = b_n J_n(\sqrt{\lambda} r),$$

где a_n и b_n некоторые константы. Из граничного условия получаются уравнения

$$a_n J_n(\sqrt{\lambda} a) = 0, \quad b_n J_n(\sqrt{\lambda} a) = 0, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Отсюда ясно, что число $\sqrt{\lambda} a$ должно быть нулем функции Бесселя некоторого порядка.

Положительные нули функции $J_n(x)$, перенумерованные в порядке возрастания, обозначают как $j_{n,m}$. Бурже в 1866 году высказал гипотезу о том, что среди этих чисел нет равных.[10] По всей видимости, она была доказана лишь 1929 году на основе результатов Зигеля, но на практике ее употребляют повсеместно. В данном случае, получается, что любое собственное значение круга можно представить в виде

$$\lambda = \frac{j_{k,m}^2}{a^2},$$

при этом a_k и b_k могут быть какими угодно, а все прочие a_n и b_n должны быть равны нулю, то есть этому собственному значению отвечает собственная функция вида

$$u = J_k(j_{k,m} r/a)(a \cos k\varphi + b \sin k\varphi).$$

Прямой подстановкой можно убедиться и в обратном: для любых $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $m = 1, 2, \ldots$ это выражение является собственной функцией круга. Таким образом, мы нашли, что *все собственные значения круга исчерпываются числами*

$$\lambda_{k,m} = \frac{j_{k,m}^2}{a^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m = 1, 2, \ldots$$

причем каждому из них отвечает семейство собственных функций

$$u_{k,m} = J_k(j_{k,m} r/a)(a \cos k\varphi + b \sin k\varphi), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

[10] Ватсон Г. Теория бесселевых функций, §15.28.

При $k=0$ мы получаем семейство однократных собственных значений

$$\lambda_{0,m} = \frac{j_{0,m}^2}{a^2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

каждому из которых отвечает по одной собственной функции

$$u = J_k(j_{0,m} r/a),$$

определенной с точностью до мультипликативной константы. Эти собственные функции не меняются при поворотах, переводящих круг сам в себя. При $k > 0$ мы получаем семейства двукратных собственных значений

$$\lambda_{k,m} = \frac{j_{k,m}^2}{a^2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

каждому из которых отвечает семейство собственных функций

$$u_{k,m} = J_k(j_{k,m} r/a)(a \cos k\varphi + b \sin k\varphi), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

это семейство не меняется при поворотах круга, но его элементы, напр., собственная функция

$$u = J_k(j_{k,m} r/a) \cos k\varphi,$$

при поворотах переходит в другие элементы этого же семейства. Таким образом, симметрия области неизбежно ведет к кратности собственных значений.

Разыщем теперь второе по величине собственное значение, обозначенное выше как λ_2. Мы знаем, что узловые линии отвечающих ему собственных функций должны делить круг на две части. Таких функции две: узловая линия функции

$$u_{0,2} = J_0(j_{0,2} r/a)$$

представляет собой окружность

$$r = \frac{j_{0,1}}{j_{0,2}} a,$$

а узловая линия

$$u_{1,1} = J_1(j_{1,1} r/a)(a \cos \varphi + b \sin \varphi)$$

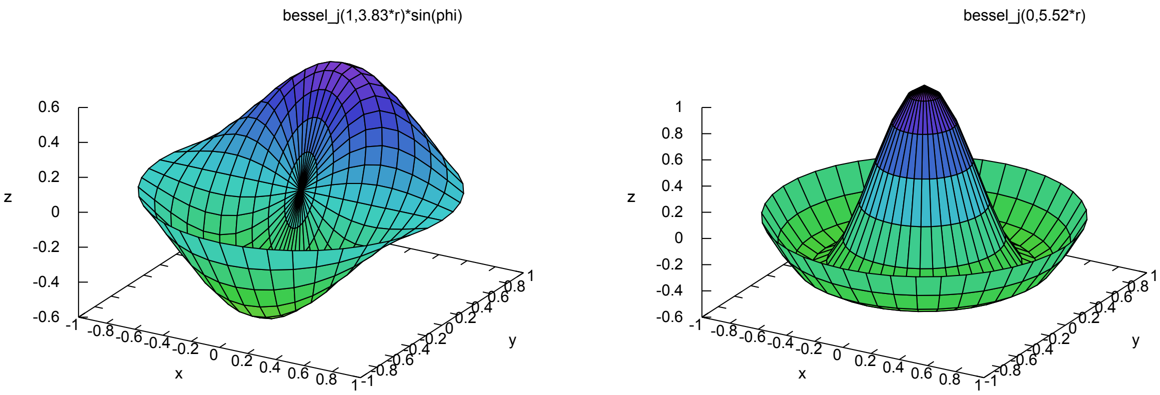


Рис. 9: Вторая и шестая собственные функции единичного круга.

диаметр круга, положение которого зависит от a и b (см. рис. 9). Глядя на рис. 8, видим, что первый нуль функции J_1 меньше второго нуля функции J_0, поэтому

$$\lambda_2 = \frac{j_{1,1}^2}{a^2}$$

и ему отвечают семейство собственных функций

$$u_{1,1} = J_1(j_{1,1}r/a)(a\cos\varphi + b\sin\varphi).$$

Значит, в ряду собственных значений его повторяют дважды

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{j_{1,1}^2}{a^2}$$

и принимают, напр., что

$$u_2 = J_1(j_{1,1}r/a)\cos\varphi \quad \text{и} \quad u_3 = J_1(j_{1,1}r/a)\sin\varphi.$$

Небезынтересно отметить, как МКЭ справляется с кратными собственными значениями (см. рис. 10, 11). Из-за неравномерности триангуляции, матрицы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ утрачивают ту симметрию, которая вела к вырождению второго собственного значения, и поэтому приближенная задача имеет два однократных собственных значения λ_2^h и λ_3^h, отличающихся на мелких сетках в четвертом знаке. Отвечающие им u_2^h и u_3^h с графической точностью

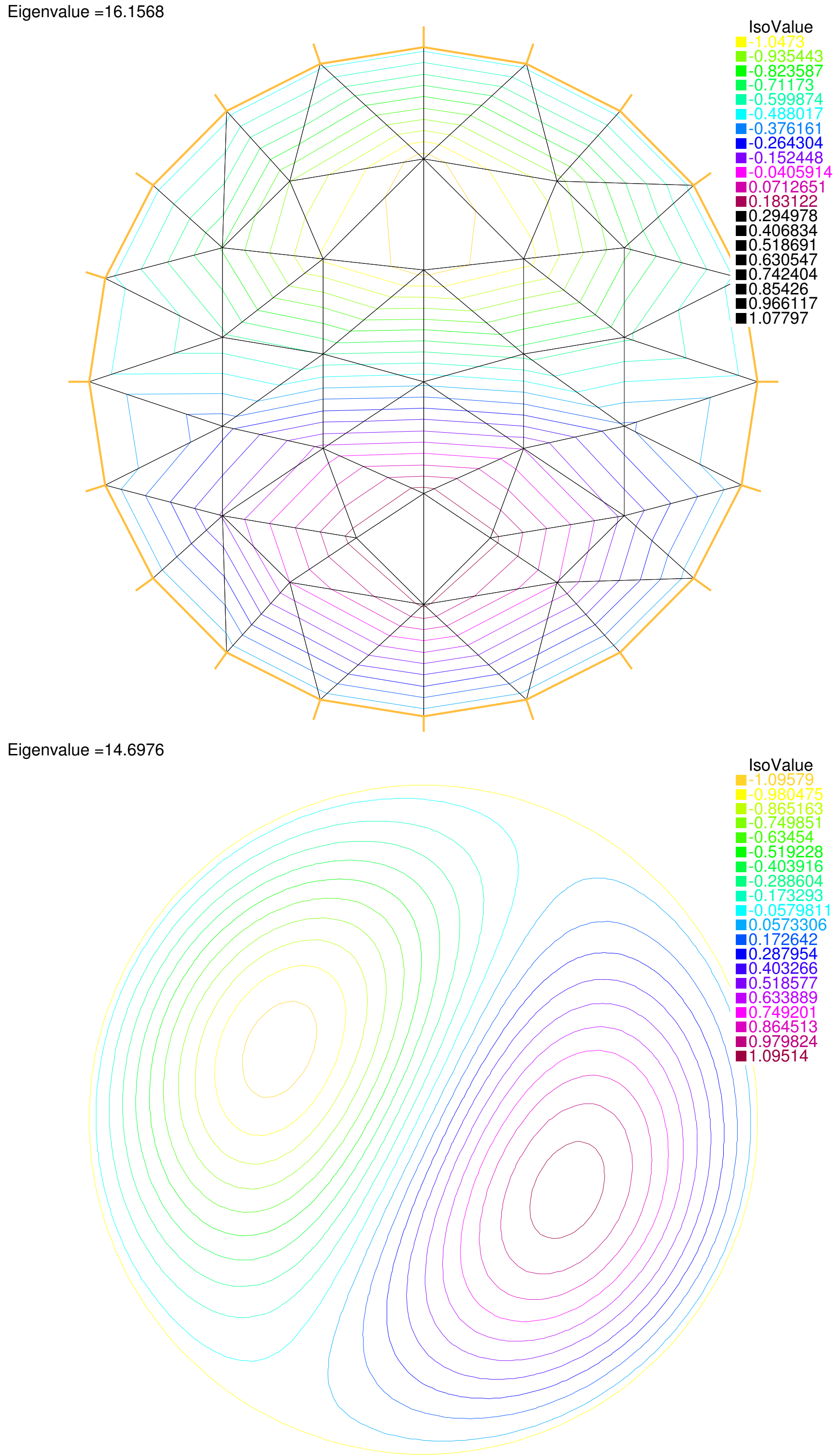
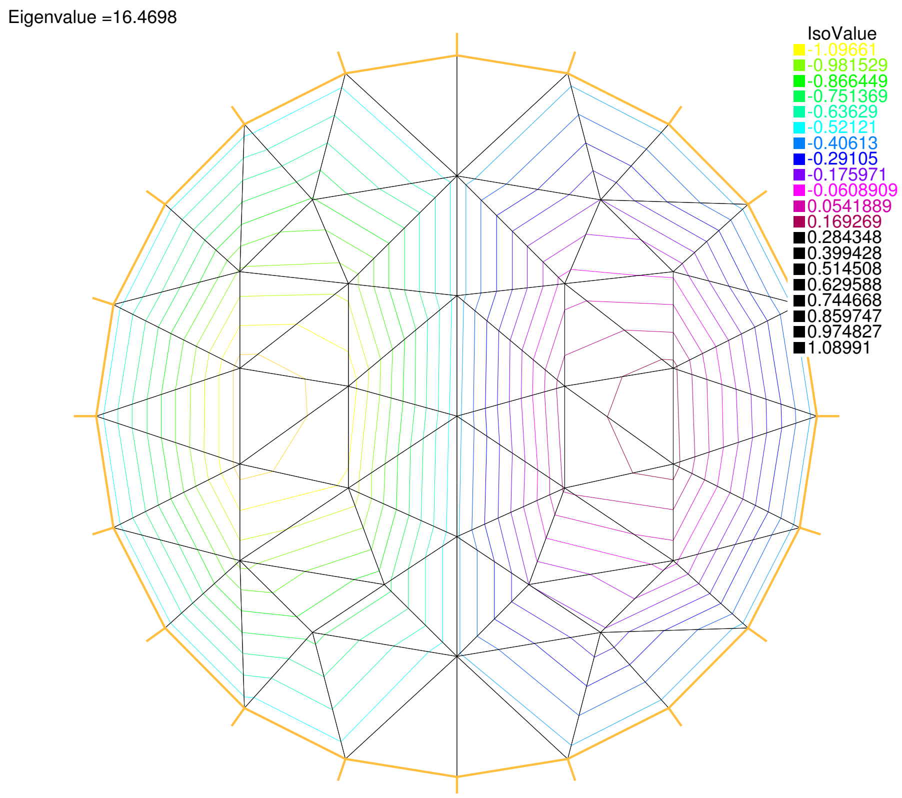


Рис. 10: Вторая собственная функция единичного круга, вычисленная МКЭ. На верхнем рисунке взято 20 вершин на границе, на нижнем 200. Получающиеся значения для λ_2 можно сравнить с точным $\lambda_2 = j_{1,1}^2 = 14.68\ldots$.



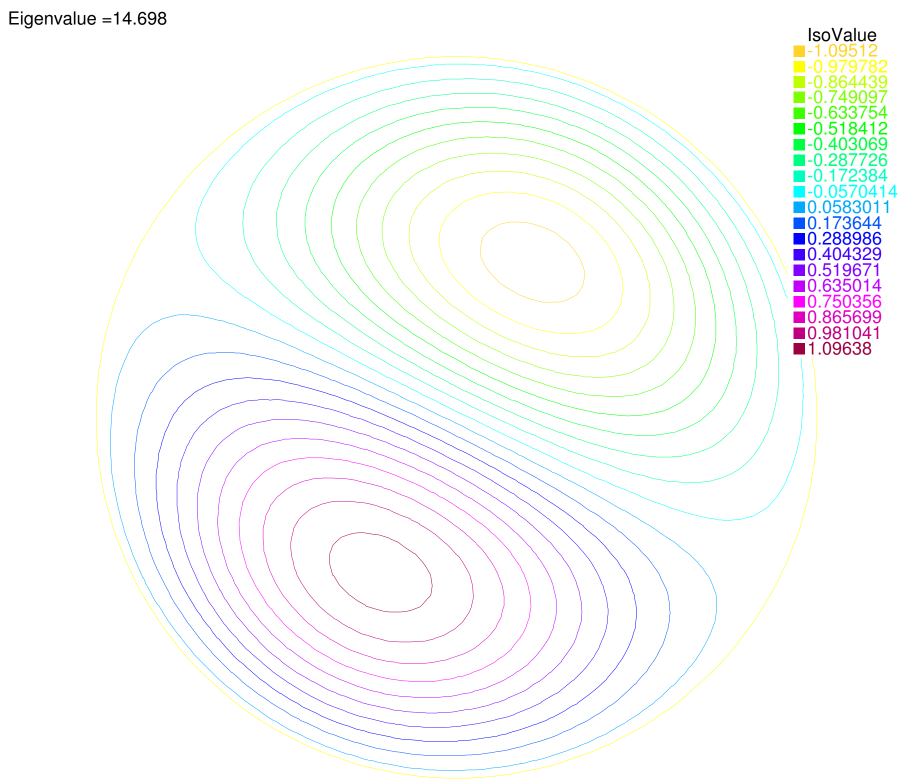


Рис. 11: Третья собственная функция единичного круга, вычисленная МКЭ. На верхнем рисунке взято 20 вершин на границе, на нижнем 200. Получающиеся значения для λ_2 можно сравнить с точным $\lambda_3 = \lambda =_2 = j_{1,1}^2 = 14.68\ldots$.

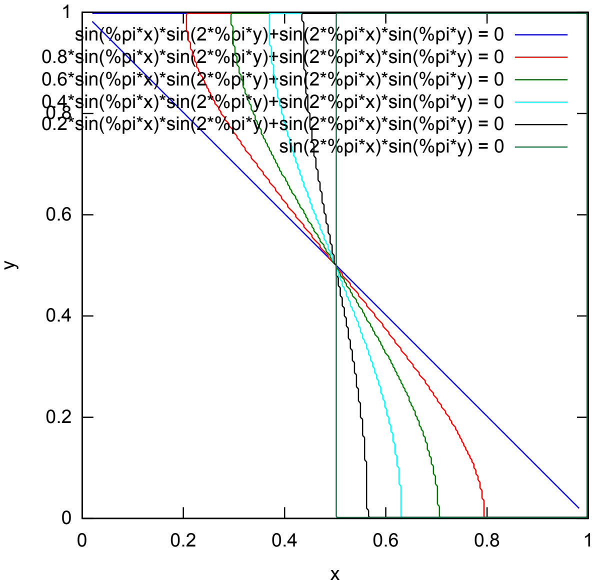


Рис. 12: Узловые линии собственных функций, отвечающих второму собственному значению квадрата

принадлежат семейству

$$J_1(j_{1,1}r/a)(a\cos\varphi + b\sin\varphi),$$

однако положение узловых линий u_2^h и u_3^h определяется исключительно триангуляцией и резко меняется при ее изменении.

Пример круга указывает на ряд неожиданных свойств собственных функций в общем случае. Во-первых, второе собственное значение, в отличие от первого, может быть кратным. Во-вторых, собственные функции, узловые линии которых делят область на две части, могут и не отвечать второму собственному значению. В данном случае, $u_{0,2}$ отвечает шестому по величине собственному значению. В-третьих, симметричные области обязательно имеют кратные собственные значения.

5.2 Собственные функции прямоугольника

Собственные функции прямоугольника были найдены выше методом разделения переменных. Собственными значениями прямоугольника $a \times b$ являются числа

$$\lambda_{n,m} = \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2}$$

которым, в надлежащим образом выбранной декартовой системе координат, отвечают собственные функции

$$u_{m,n} = \sin\frac{\pi m x}{a}\sin\frac{\pi n y}{b}.$$

Метод разделения переменных не может дать гарантии, что задача не допускает других собственных функций, которые нельзя представить в виде $u = X(x)Y(y)$. Более того, как мы сейчас увидим это и не верно. Поэтому здесь следует или повторить размышления, использованные в пред. разделе для нахождения всех собственных функций круга, или сослаться на теорию рядов Фурье, в которой было показано, что любую функцию двух переменных можно разложить в ряд по таким синусам, то есть они уже образуют полную систему в смысле свойства 5.

Обратимся теперь к квадрату $a \times a$ и перечислим его собственные значения в порядке возрастания. Первое собственное значение нам уже известно:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi^2}{a^2}, \quad u_1 = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$$

второму собственному значению

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{5\pi^2}{a^2}$$

отвечают две собственные функции

$$u_{2,1} = \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} \quad \text{и} \quad u_{1,2} = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a},$$

а следовательно, и целое семейство

$$C_1\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} + C_2\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

То обстоятельство, что второе собственное значение квадрата оказалось кратным, не должно нас удивлять: поворот на $\pi/2$ переводит квадрат в квадрат, $u_{2,1}$ в $u_{1,2}$, и лишь их линейная комбинация переходит сама в себя.

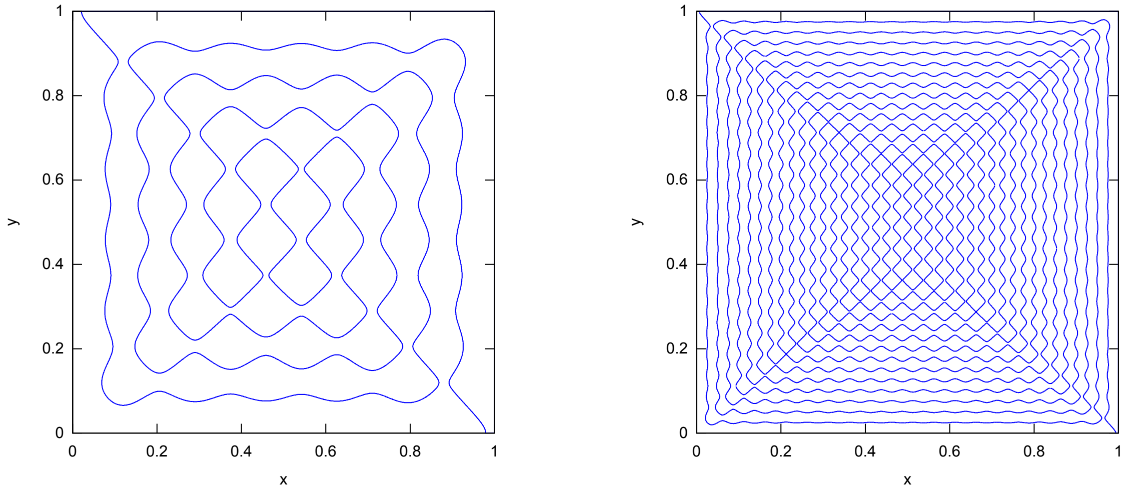


Рис. 13: Узловые линии функции $u = \sin(2\pi r x)\sin(\pi y) + 0.9\sin(\pi x)\sin(2\pi r y)$ при $r = 6$ и $r = 20$.

Иными словами, симметрия опять приводит к вырождению второго собственного значения. Узловые линии этих собственных функций соединяют две точки границы и делят область на две части, однако эти линии далеко не при всех значениях C_1 и C_2 оказываются прямыми (см. рис. 12).

Еще более экзотичными могут оказаться узловые линии старших собственных функций: собственному значению

$$\lambda = \frac{\pi^2}{a^2}(4r^2 + 1)$$

отвечает собственная функция

$$u = \sin(2\pi r x/a)\sin(\pi y/a) + \mu\sin(\pi x/a)\sin(2\pi r y/a),$$

узловая линия которой при μ, близких к единице, делит область на две части и заполняет область все плотнее и плотнее с ростом r (см. рис. 13). Также небезынтересно отметить, что вычисление кратности собственного значения λ упирается в «диофантов» вопрос о том, можно ли «данное число, являющееся суммой двух квадратов, разбить на два других квадрата» и, если можно, то сколькими способами. [11]

Дом. задание.

[11] См. задачу 9 книги II Арифметики Диофанта. То, что эта задача допускает нетривиальные решения видно из того, что, напр., $85^2 = 68^2 + 51^2 = 40^2 + 75^2$.

1. Нарисуйте узловые линии первых 6-ти собственных функций круга.

2. Нарисуйте узловые линии первых 6-ти собственных функций квадрата.

3.* Докажите, что собственное значение квадрата может иметь сколь угодно большую кратность.

Указ. Воспользуйтесь рациональной параметризацией окружности $x^2 + y^2 = a^2$:

$$x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad y = a\frac{t^2-1}{t^2+1},$$

указанной Диофантом при решении 8 задачи II книги.

4. Для задачи на собственные значения

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

с краевыми условиями Неймана докажите, что 1.) $\lambda = 0$ – всегда является собственным значением, что 2.) все прочие собственные значения положительны, и что 3.) собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

5. Найдите наименьшее собственное значение задачи

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{x=0,\,1} = 0 \\ u\big|_{y=0,\,1} = 0 \end{cases}$$

в квадрате 1×1 и укажите его кратность. Ср. [2], стр. 30.

6. Найдите второе собственное значение задачи

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

в квадрате 1×1 и укажите его кратность.

Список литературы

Основная

[1] Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физики. Подойдет любое издание, напр., М.: «Наука», 2004 г.

[2] Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физики. Изд-во МГУ, 1994.

Дополнительная

[3] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1, М., 1933; Т. 2, М., 1945.

[4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Подойдет любое издание, напр., 6-е изд. М., Изд-во МГУ, 1999.

[5] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.