Методы математической физики

Семинары № 5-6. Уравнение Лапласа и задача о стационарном распределении температуры.

Мих. Дмитр. Малых

Физический факультет МГУ

2012/13 уч. г., версия от 17 сентября 2012 г.

Определения

В $\mathbb{R}^n$ дифференциальный оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

называют *оператором Лапласа* и обозначают как Δ_n или просто Δ. Как известно из курса Анализа, при $n = 2$ и $n = 3$ для любой гладкой функции u верно

$$\Delta u = \mathrm{div}(\mathrm{grad} u) = (\nabla, \nabla)u.$$

Уравнение $\Delta u = 0$ называют *уравнением Лапласа*, а уравнение вида $\Delta u = f$ – *уравнение Пуассона* (здесь f – заданная функция, т.н. правая часть уравнения Пуассона).

Определения

Функцию, удовлетворяющую в области Ω уравнению Лапласа, называют *гармонической*. При этом обычно прибавляют, что эта функция должна быть непрерывной и дифференцируемой в замыкании $\overline{\Omega}$ и иметь непрерывные производные 2-го порядка по всем переменным в области Ω.

Вопрос № 1.

Стационарное распределение температуры в теле

Как вообразить гармоническую функцию?

Уравнение Лапласа появляется при моделировании самых разнообразных физических процессов. Более того, можно предвидеть многие свойства краевых задач для уравнения Лапласа, если связать его с задачей о стационарном распределении температуры в теле.

Задача о стационарном распределении температуры в теле

Попытаемся создать модель, позволяющую описать стационарное распределение температуры u в теле Ω произвольной формы.
Пусть V – произвольный малый куб, вписанный в тело Ω.
Количество тепла, протекающего через грань куба, тем больше, чем сильнее изменение температуры вдоль нормали к грани.

Закон Фурье

Согласно *закону Фурье* эта зависимость линейная, то есть за промежуток времени от t до $t + dt$ через грань площади S протекает

$$dQ = -k\frac{\partial u}{\partial n}S dt, \quad (\frac{\partial u}{\partial n} = (\mathrm{grad} u, n)) \qquad (1)$$

где k – *коэффициент теплопроводности*, зависящий от материала тела, n – единичная внешняя нормаль к грани, а производная берется в какой-либо точке рассматриваемой грани.

Уравнение, описывающее распределение температуры

Если распределение температуры не зависит от времени, то суммарный поток через все грани куба должен быть равен нулю:

$$\int\limits_{\partial V} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0.$$

В силу теоремы Гаусса-Остроградского

$$\int\limits_{\partial V} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int\limits_{\partial V} (\mathrm{grad} u, n) d\sigma = \int\limits_{V} \mathrm{divgrad} u d\tau,$$

и, поскольку куб V – произвольный, распределение температуры u должно удовлетворять уравнению Лапласа

$$\mathrm{divgrad} u = 0.$$

Двумерное уравнение Лапласа

Двумерное уравнение Лапласа не трудно связать с задачей о распределении температуры в цилиндре в том случае, когда есть основания считать, что температура не меняется вдоль его оси. В самом деле, в этом случае температура удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

на любом нормальном сечении цилиндра.

Вопрос № 2.

Первая краевая задача для уравнения Лапласа

Постановка задачи

Задачу с условиями Дирихле (или, как еще говорят, первую краевую задачу для уравнения Лапласа)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{(в области } \Omega\text{)} \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \tag{2}$$

можно интерпретировать как задачу об отыскании стационарного распределения температуры внутри тела Ω по известному распределению $u = f$ температуры на границе.

Классическое решение

Определение

Классическое решение этой задачи должно быть функцией, которая дважды непрерывно дифференцируема в открытой области Ω и хотя бы непрерывно дифференцируемо в ее замыкании $\overline{\Omega}$.

Требование дифференцируемости в замкнутой области кажется излишним, однако без него затруднительно применять теорему Грина. Ср. [1], гл. V, §1.1.

Единственность решения

К этой задаче не требуется добавлять дополнительных условий, поскольку эта задача и так не допускает двух различных решений.
Доказательство проведем от противного.

Доказательство

Пусть w – разность двух решений, она удовлетворяет однородной задаче

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{(в области } \Omega) \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Умножая уравнение $\Delta w = 0$ на w и интегрируя по Ω, получим, что

$$\int\limits_{\Omega} w \Delta w d\tau = 0.$$

Доказательство-2

Вспомним, что

$$w\Delta w = w\mathrm{div}(\mathrm{grad}w) = \mathrm{div}(w\mathrm{grad}w) - (\mathrm{grad}w, \mathrm{grad}w),$$

и по теореме Гаусса-Остроградского

$$\int\limits_{\Omega} \mathrm{div}(w\mathrm{grad}w)d\tau = \int\limits_{\partial\Omega} (w\mathrm{grad}w, n)d\tau = 0,$$

поскольку на границе области $w = 0$. Но тогда как следствие $\Delta w = 0$ мы имеем

$$\int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad}w, \mathrm{grad}w)d\tau = 0,$$

что в силу $(\mathrm{grad}w, \mathrm{grad}w) \geq 0$ возможно лишь при $\mathrm{grad}w = 0$. Это означает, что w постоянная функция, равная нулю на границе рассматриваемой области, то есть w тождественно равна нулю.

Замечание

Применение теоремы Гаусса-Остроградского подразумевает наложение известных из курса Анализа условий на гладкость границы области Ω. См. [4], т. 3, no. 651.

Принцип максимума

Из физических соображений очевидно, что температура не может оказаться внутри тела выше, чем на его границе. Это утверждение называют *принципом максимума* и выражают так: гармоническая функция достигает своих минимальных и максимальных значений на границе своей области определения. Строгое доказательство принципа максимума см. в [1], гл. V, §1.

В частности, для нахождения границ, в которых меняется решение задачи (2), не требуется ее решать: во всех точках тела Ω верно

$$\inf_{\partial\Omega} f < u < \sup_{\partial\Omega} f.$$

Устойчивость решения

Из принципа максимумам сразу следует *устойчивость решения* (2) *по отношению к малым возмущениям распределения входных данных*, то есть распределения температуры f на границе области: если u_1 и u_2 – гармонические функции и на границе тела значения u_1 и u_2 различаются не более чем на δ, то и внутри области $|u_1 - u_2| \leq \delta$.

Существование решения

Значительные трудности доставляет доказательство существования решения задачи.
Средствами теории интегральных уравнений Фредгольма удается доказать, что *эта задача имеет классическое решение, если граница области Ω является гладкой поверхностью, а функция f непрерывна вдоль этой границы.*

Гладкость границы

Обычно принимают, что поверхность является поверхностью Ляпунова, то есть

- в каждой ее точке можно провести касательную плоскость, на которую однозначно проектируется кусок поверхности, лежащий в малой окрестности этой точки, и
- угол γ между нормалями, проведенными в двух точках P_1 и P_2, удовлетворяет неравенству $|\gamma| \leq \mathrm{Const}|P_1 P_2|^\delta$ при некотором $\delta > 0$.

См. [1], гл. V, §6-7.

Существование решения

Впрочем, простейшие тела – куб и конус – не имеют гладкой поверхности, поэтому часто задачу (2) решают для областей, не подпадающих под эту классическую теорему существования. По всей видимости эта задача допускает обобщенное в том или ином смысле решение всегда, даже тогда, когда границу тяжело признать поверхностью.
Особенно продвинутые результаты в этом направлении получены для случая плоских областей методами ТФКП.

Двумерная область

Абсолютно аналогично задачу с условиями Дирихле в двумерной области Ω

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (\text{в области } \Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

можно интерпретировать как задачу об отыскании стационарного распределения температуры внутри цилиндра, сечением которого служит Ω, по известному распределению $u = f$ температуры на границе, не меняющемуся вдоль оси цилиндра.

Двумерная область

Все предыдущие выкладки сохраняют свою силу с той лишь поправкой, что $d\tau$ теперь следует считать элементом площади Ω, а $d\sigma$ – элементом длины кривой $\partial\Omega$.
Поэтому *решение этой задачи, если оно вообще существует, единственно и достигает своих максимальных и минимальных значений на границе* $\partial\Omega$. Наконец, *эта задача имеет классическое решение, если граница области* Ω *является гладкой кривой, а функция* f *непрерывна вдоль этой границы*

Пример.

Первая краевая задача в круге

Борьба со старшими обертонами

Пусть Ω представляет собой круг радиуса a. Поместим начало координат в его центр, введем полярные координаты r, φ и обратимся к задаче

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad (r < a) \\ u|_{r=a} = f(\varphi) \end{cases}$$

Поскольку окружность – гладкая кривая, эта задача имеет и притом единственное классическое решение, если f является непрерывной функцией переменной φ.

Разложение в ряд Фурье

Это решение любом фиксированном $r < a$ является дифференцируемой периодической функцией φ, поэтому его можно разложить в ряд Фурье

$$u = \frac{u_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r)\cos(n\varphi) + v_n(r)\sin(n\varphi),$$

коэффициенты которого даются формулами

$$u_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(r,\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi, \ldots$$

ОДУ для коэффициентов ряда Фурье

Для отыскания обыкновенного дифференциального уравнения для u_n нужно вспомнить, что в полярной системе координат верно

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Умножая $\Delta u = 0$ на $\cos(n\varphi)$ и интегрируя по φ, имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r u \cos(n\varphi) d\varphi + \frac{1}{r^2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\cos(n\varphi) d\varphi = 0$$

или, вынося производные по r за знак интеграла и избавляясь от производных по φ интегрированием по частям,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_n}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r^2}u_n = 0.$$

Уравнение Эйлера

Уравнение

$$r^2u_n'' + ru_n' - n^2u_n = 0$$

является линейным дифференциальным уравнением Эйлера, частные решения которого можно подобрать в виде r^α. Для отыскания α получается квадратное уравнение

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = 0,$$

решением которого служат $\alpha = \pm n$. При $n > 0$ общим решением является

$$C_1r^n + C_2r^{-n}.$$

Коль скоро u – гладкая функция в нуле, то и

$$u_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi$$

имеет в нуле конечный предел, то есть $u_n(r) = Cr^n$.

Учет граничного условия

Для отыскания одной константы вполне достаточно одного условия $u|_{r=a} = f$. Из него сразу получаем

$$u_n(a) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f \cos(n\varphi) d\varphi = a_n,$$

обозначив через a_n – коэффициент ряда Фурье для функции f. В итоге получается, что

$$u_n = a_n \left(\frac{r}{a}\right)^n .$$

Случай $n = 0$

При $n = 0$ имеем

$$r^2 u_0'' + r u_0' = 0;$$

относительно $y = u_0'$ получается линейное уравнение первого порядка

$$r y' + y = 0,$$

общим решением которого служит $y = C_1 r^{-1}$, поэтому

$$u_0 = C_1 \ln r + C_2.$$

Из ограниченности u в нуле получаем, что u_0 является постоянной, которая, конечно, в силу граничного условия должна совпадать с a_0.

Оценки для коэффициентов Фурье

Алгоритм

Для того, чтобы решить задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad (r < a) \\ u|_{r=a} = f(\varphi), \end{cases}$$

следует найти коэффициенты ряда Фурье для f по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f \cos(n\varphi) d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f \sin(n\varphi) d\varphi,$$

и выписать ответ

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi))$$

Замечание

Непрерывности f не гарантирует возможность разложения этой функции в ряд Фурье

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi),$$

но на практике часто, напротив, функцию f легче разложить в ряд Фурье, чем считать a_n и b_n по приведенным выше формулам.

Числовой пример

Для

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (r < 1) \\ u|_{r=1} = y^2 \end{cases}$$

имеем

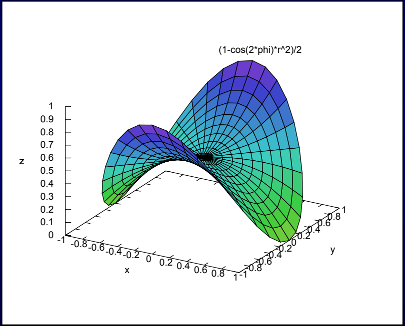
$$y^2 = \sin^2\varphi = \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2}$$

и поэтому

$$u = \frac{1 - r^2\cos(2\varphi)}{2} = \frac{1 - x^2 + y^2}{2}.$$

График решения

На графике этой функции хорошо видно, что решение не имеет точек экстремума, зато в нуле у него имеется седловая точка.



Вопрос № 2.

Вторая краевая задача

Постановка задачи

Задачу с условиями Неймана (или, как еще говорят, вторую краевую задачу для уравнения Лапласа)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (\text{в области } \Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \tag{3}$$

можно интерпретировать как задачу об отыскании стационарного распределения температуры внутри тела Ω по известному потоку тепла через его границу.

Предупреждение

Эта задача интересна тем, что ее решение неединственно и существует лишь при некоторых дополнительных условиях.

Неединственность решения

Решение этой задачи не единственно, но определено с точностью до аддитивной постоянной.
Для доказательства достаточно повторить выкладки, проделанные при доказательстве единственности первой краевой задачи. Только интеграл

$$\int\limits_{\Omega} \mathrm{div}(w \mathrm{grad} w) d\tau = \int\limits_{\partial\Omega} (w \mathrm{grad} w, n) d\tau = 0,$$

обратиться теперь в нуль из-за того, что на границе области

$$(\mathrm{grad} w, n) = \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

В итоге получится, что градиент разности двух решений u_1 и u_2 равен нулю, откуда $u_1 - u_2 = C$.

Условие существования решения

Из физических соображений очевидно, что стационарное распределение температуры невозможно, если через полную границу тела имеется ненулевой поток тепла. Этот поток пропорционален

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \oint_{\partial\Omega} f d\sigma.$$

Поэтому *вторая краевая задача не имеет решения, если*

$$\oint_{\partial\Omega} f d\sigma \neq 0.$$

Условие существования решения-2

Средствами теории интегральных уравнений Фредгольма (см. [1], гл. V, §7.) удается доказать, что *вторая краевая задача имеет классическое решение, если граница области* Ω *является гладкой поверхностью, а функция* f *непрерывна вдоль этой границы и удовлетворяет условию*

$$\oint_{\partial\Omega} f\,d\sigma = 0.$$

Пример.

Вторая краевая задача в круге

Постановка задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad (r < a) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi) \end{cases}$$

Эта задача имеет и притом определенное с точностью до константы классическое решение, если f является непрерывной функцией переменной φ и

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0.$$

Разложение решения в ряд Фурье

При любом фиксированном $r < a$ это решение является дифференцируемой периодической функцией φ, поэтому его можно разложить в ряд Фурье

$$u = \frac{u_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r)\cos(n\varphi) + v_n(r)\sin(n\varphi),$$

коэффициенты которого даются формулами

$$u_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi, \quad v_n = \ldots$$

Нахождение u_0: ОДУ

Специфические трудности возникают только при нахождении u_0. Проинтегрируем $\Delta u = 0$ по φ:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r u d\varphi + \frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} d\varphi = 0$$

откуда, вынося производные по r за знак интеграла и избавляясь от производных по φ интегрированием, имеем

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_0}{dr}\right) = 0$$

Поэтому

$$r\frac{du_0}{dr} = 1$$

и

$$u_0 = C_1 \ln r + C_2.$$

Нахождение u_0: учет граничных условий

Ограниченность u в нуле дает $C_1 = 0$, поэтому

$$u_0(r) = C.$$

Специфика ситуации состоит в том, что граничное условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi)$$

не позволяет определить эту константу. Вместо этого оно дает

$$0 = u_0'(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f d\varphi,$$

то есть еще раз указывает на

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f d\varphi = 0$$

как на необходимое условие разрешимости задачи, а также на то, что решение второй определено с точностью до константы.

Нахождение u_n: ОДУ

Для нахождения u_n, умножив $\Delta u = 0$ на $\cos(n\varphi)$ и проинтегрировав по φ, опять получим уравнение Эйлера

$$r^2 u_n'' + r u_n' - n^2 u_n = 0,$$

общим решением которого является

$$C_1 r^n + C_2 r^{-n}.$$

В силу ограниченности u в нуле

$$u_n(r) = C r^n.$$

Нахождение u_n: учет граничных условий

Для отыскания константы из граничного условия имеем

$$u_n'(a) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\cos(n\varphi)d\varphi = a_n,$$

обозначив через a_n – коэффициент ряда Фурье для функции f. В итоге получается, что

$$u_n = a_n\frac{r^n}{na^{n-1}}.$$

Решение 2-ой краевой задачи в круге

Алгоритм

Для того, чтобы решить задачу

$$\Delta u = f, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f,$$

следует найти коэффициенты ряда Фурье для f по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\cos(n\varphi)d\varphi, \quad b_n\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\sin(n\varphi)d\varphi,$$

и выписать

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{na^{n-1}}\left(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)\right) + \text{Const}.$$

Числовой пример

Для

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad (r < 1) \\ \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = y^3 \end{cases}$$

имеем

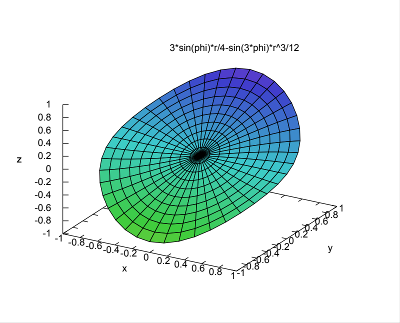
$$y^3 = \sin^3 \varphi = \frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4}$$

и поэтому

$$u = \frac{3}{4} r \sin\varphi - \frac{1}{12} r^3 \sin 3\varphi + \text{Const.}$$

График решения

Поскольку u – гармоническая функция, она принимает максимальные и минимальные значения на границе.



Максимальная температура

Часто в практических задачах интересно не полное распределение температуры, а амплитуда ее изменения. Напр., важно узнать не расплавится ли цилиндр, если через его границы будет проходить заданный поток тепла. Максимальное значение, которое принимает u, можно вычислить, отыскав максимум у

$$u(1,\varphi) = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{12}\sin 3\varphi + C.$$

Максимальная температура-2

Производная

$$\frac{du(1,\varphi)}{d\psi} = \frac{3}{4}\cos\varphi - \frac{1}{4}\cos 3\varphi = \frac{1}{4}(3\cos\varphi - \cos^3\varphi + 3\cos\varphi\sin^2\varphi)$$
$$= (\frac{3}{2} - \cos^2\varphi)\cos\varphi,$$

меняет знаки при $\varphi = \pi/2$ (max) и $\varphi = 3\pi/2$ (min). Поэтому максимальное значение u равно

$$u_{\max} - u_{\min} = u(1,\pi/2) - u(1,\pi/2) = \frac{5}{3} = 1.66\ldots.$$

Вопрос № 4.

Третья краевая задача

Постановка задачи

Третью краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad (\text{в области } \Omega) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \tag{4}$$

можно интерпретировать как задачу об отыскании стационарного распределения температуры внутри тела Ω по известной температуре окружающей его среды.

Закон Ньютона

Согласно закону Ньютона поток тепла через малый кусок границы $d\sigma$ пропорционален разности температуры тела u и окружающей среды θ, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -h(u-\theta);$$

коэффициент теплообмена h должен быть положительным: тепло вытекает из тела, если вблизи границы в теле

$$\frac{\partial u}{\partial n} < 0,$$

а вне него $u > \theta$.

Единственность решения

При $h > 0$ задача не допускает двух различных решений. В противном случае разность w двух решений удовлетворяла бы однородной задаче

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & (\text{в области } \Omega) \\ \frac{\partial w}{\partial n} + hw\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Опять умножая уравнение $\Delta w = 0$ на w и интегрируя по Ω, получим, что

$$\int\limits_{\Omega} w \Delta w d\tau = 0.$$

Единственность решения

Как и ранее

$$w\Delta w = w\mathrm{div}(\mathrm{grad}w) = \mathrm{div}(w\mathrm{grad}w) - (\mathrm{grad}w, \mathrm{grad}w),$$

но теперь по теореме Гаусса-Остроградского

$$\int\limits_{\Omega} \mathrm{div}(w\mathrm{grad}w)d\tau = \oint\limits_{\partial\Omega} (w\mathrm{grad}w, n)d\sigma = -h \oint\limits_{\partial\Omega} w^2 d\sigma,$$

поскольку на границе области верно

$$\frac{\partial w}{\partial n} = -hw.$$

Единственность решения-2

Таким образом, как следствие $\Delta w = 0$ мы имеем

$$\int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad} w, \mathrm{grad} w) d\tau + h \oint\limits_{\partial\Omega} w^2 d\sigma = 0,$$

что в силу $(\mathrm{grad} w, \mathrm{grad} w) \geq 0$ и $w^2 \geq 0$ возможно лишь при $\mathrm{grad} w = 0$ в Ω и $w = 0$ на ее границе. Это означает, что функция w тождественно равна нулю.

Существование решения

Доказательство существования классического решения у третьей краевой задачи классическими способами требует еще больших усилий и, вероятно, проще перейти к уравнению Пуассона с однородными граничными условиями и доказать для него существование обобщенного решения. См., напр., [5], гл. 2, §5.

Пример

Третья краевая задача в круге

Постановка задачи

Классическое решение третьей краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad (r < a) \\ \frac{\partial u}{\partial r} + hu\Big|_{r=a} = f(\varphi) \end{cases}$$

при $h > 0$ существует и единственно.

Разложение решения в ряд Фурье

$$u = \frac{u_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r)\cos(n\varphi) + v_n(r)\sin(n\varphi).$$

Коэффициент u_0

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_0}{dr}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad u_0=C_1\ln r+C_2.$$

Ограниченность u в нуле дает $C_1=0$.
Граничное условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}+hu\right|_{r=a}=f(\varphi)$$

позволяет определить эту константу:

$$u_0'(a)+hu_0(a)=hC_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f\,d\varphi=a_0,$$

то есть

$$u_0(r)=C_2=\frac{a_0}{h}$$

Коэффициент u_n

$$r^2 u_n'' + r u_n' - n^2 u_n = 0 \quad \Rightarrow \quad u_n(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n}.$$

Из ограниченности в нуле имеем $C_2 = 0$. Из граничного условия имеем

$$u_n'(a) + h u_n(a) = C_1 (n a^{n-1} + h a^n) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f \cos(n\varphi) d\varphi = a_n,$$

поэтому

$$u_n = a_n \frac{r^n}{(n + ah) a^{n-1}}.$$

Появившейся в знаменателе множитель $n + ah$ не обращается в нуль, если $h > 0$.

Решение 3-й краевой задачи в круге

Алгоритм

Для того, чтобы решить задачу

$$\Delta u = f, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right|_{r=a} = f,$$

следует найти коэффициенты ряда Фурье для f по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\cos(n\varphi)d\varphi, \quad b_n\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\sin(n\varphi)d\varphi,$$

и выписать

$$u = \frac{a_0}{2h} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{(n+ah)a^{n-1}}\left(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)\right).$$

Числовой пример

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad (r < 1) \\ \frac{\partial u}{\partial r} + hu\Big|_{r=1} = y \end{cases}$$

имеем

$$y = \sin\varphi$$

и поэтому

$$u = \frac{1}{1+h} r \sin\varphi$$

При $h = 0$ решение стремится к решению второй краевой задачи, а при $h \to +\infty$ решение равномерно в Ω стремится к нулю.

Домашняя работа

Выполненную домашнюю работу следует собрать в один pdf-файл и послать по адресу `mmph@narod.ru`, указав в теме письма номер группы. В ответ придут замечания и комментарии. После одной такой итерации работа будет *опубликована* на сайте `http://mmph.narod.ru`.

Домашняя задача № 1

Решите краевую задачу в кольце

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad (1 < r < 2) \\ u|_{r=1} = \sin\varphi \; \dfrac{\partial u}{\partial r} + u\Big|_{r=2} = \cos\varphi \end{cases}$$

Для справок: [2], гл. III, §4.

Домашняя задача № 2

Какое условие на бесконечности нужно прибавить к задаче

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad (1 < r) \\ u|_{r=1} = \sin 2\varphi \end{cases}$$

с тем, чтобы она имела единственное решение?
Для справок: [2], гл. III, §3.

Домашняя задача № 3 (трудная)

В [2] на стр. 87-90 описан алгоритм решения уравнения Лапласа в прямоугольнике, позволяющий найти решение в виде суммы двух рядов. Примените его к задаче

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (0 < x < 1,\, 0 < y < 1) \\ u|_{x=0} = 0, & u|_{x=1} = y, \\ u|_{y=0} = 0, & u|_{y=1} = x, \end{cases}$$

Сравните графически это решение с точным, которое можно без труда угадать: $u = xy$. Сходятся ли ряды для решения равномерно в квадрате? Если нет, то сходятся ли они вообще?

Ссылки

- *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физики. Подойдет любое издание, напр., М.: «Наука», 2004 г.
- *Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Задачи по математической физики. Изд-во МГУ, 1994.
- *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Подойдет любое издание, напр., 6-е изд. М., Изд-во МГУ, 1999.
- *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления.
- *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики.

Конец семинара № 6