Методы математической физики

Семинар № 2. Колебания струны: метод Даламбера.

Мих. Дмитр. Малых

Физический факультет МГУ

2012/13 уч. г., версия от 12 июня 2012 г.

Вопрос № 1

Формула Даламбера

Формула Даламебра

Теорема

Общим решением уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

является

$$u = F_1(x - at) + F_2(x + at),$$

где F_1 и F_2 – какие угодно функции.

Если эти функция не являются дифференцируемыми, но полезными для тех или иных приложений, то u называют обобщенным решение уравнения колебаний.

Доказательство-1: замена переменных

Сделаем замену переменных

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at;$$

тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}(-a) + \frac{\partial u}{\partial \eta}a, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(-a)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(-a)a + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}a^2$$

поэтому в новых переменных уравнение колебаний записывается просто как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Доказательство-2

Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

легко решить:

$$\frac{\partial u}{\partial\eta} = F(\eta), \quad u = \int F(\eta)d\eta + G(\xi).$$

Иными словами, любое решение уравнения $u_{\xi\eta} = 0$ можно представить в виде

$$u = F_1(\xi) + F_2(\eta).$$

Обратное очевидно: всякая функция такого вида удовлетворяет уравнению $u_{\xi\eta} = 0$.

Вопрос № 2.

Задача на бесконечной прямой

Задача на бесконечной прямой

При рассмотрении возбуждения струны ударом молоточка, мы уже имели возможность видеть, что локальное возбуждение струны приводит к возникновению горба, бегущего по струне с постоянной скоростью. Желая исследовать движение такого рода горбов вдоль струны, принимают ее длину бесконечно большой и получают очень простую задачу.

Решение задачи на бесконечной прямой

Теорема

Если функция φ дважды непрерывно дифференцируема, а функция ψ непрерывно дифференцируема хотя бы один раз, то начальная задача на прямой:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x \in \mathbb{R},\ t > 0) \\ u\big|_{t=0} = \varphi, \quad u_t\big|_{t=0} = \psi \end{cases}$$

имеет и притом одно классическое решение, которое доставляет *формула Даламбера*

$$u = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

Пример № 1: удар молоточком в точке c.

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \begin{cases} v, & |x-c| < \delta \\ 0, & |x-c| > \delta \end{cases} = v\theta(x)$$

По формуле Даламбера решением будет

$$u = \frac{v}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \theta(\xi) d\xi = \frac{v}{2a} \text{Длина}([x-at, x+at] \cap [c-\delta, c+\delta]).$$

Это решение не является классическим, да и представить его себе не очень просто.

Упрощение задачи

Если сгладить профиль начальных скоростей до

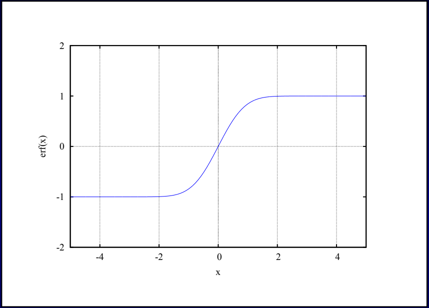
$$u_t\big|_{t=0} = ve^{-x^2},$$

то по формуле Даламбера

$$u = \frac{v}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} e^{-\xi^2}d\xi = \frac{v\sqrt{\pi}}{4a}\left(\mathrm{Erf}(x+at) - \mathrm{Erf}(x-at)\right),$$

где Erf – интеграл ошибок.

Интеграл ошибок

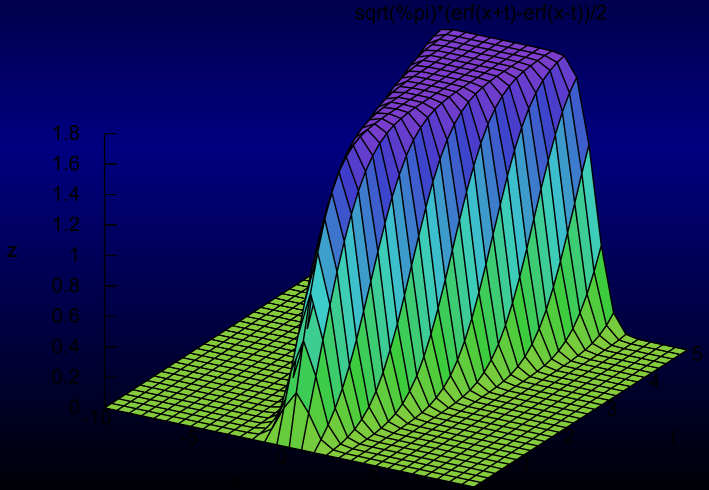


Функция

$$\mathrm{Erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\xi} e^{-t^2} dt.$$

часто возникает в приложениях, но не может быть выражена при помощи элементарных функций. [2]

График решения



Описание решения

При ударе происходит смещение струны на некоторую постоянную величину и это смещение распространяется вдоль струны с постоянной скоростью a. Именно таким образом, ведет себя мгновенный профиль струны конечной длины, если удар приходится в ее середину и рассматриваются малые времена (как только возбуждение доходит до закрепленного конца струны, происходит отражение).

Вопрос № 3.

Задача на полупрямой

Задача на полупрямой

Желая рассмотреть отражение только на одном конце струны, напр., движение горба вдоль струны, возбужденного путем удара возле одного из концов, рассматривают задачу на полупрямой:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x > 0,\, t > 0) \\ u\big|_{t=0} = \varphi, \quad u_t\big|_{t=0} = \psi \\ u\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

Решение задачи на полупрямой

Эта задача легко сводится к задаче на всей прямой путем нечетного продолжения начальных данных: если в формулу Даламбера подставить нечетные φ и ψ, то

$$u|_{x=0} = \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{-at}^{at} \psi(\xi) d\xi = 0,$$

то есть граничное условие $u|_{x=0} = 0$ удовлетворяется автоматически.

Пример

Решением задачи

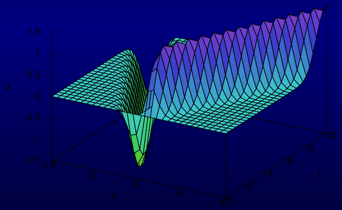
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x > 0,\ t > 0) \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = e^{-(x-1)^2} \\ u|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

будет

$$u = \frac{v\sqrt{\pi}}{4a} \left(\mathrm{Erf}(x + at - 1) - \mathrm{Erf}(x - at - 1) - \mathrm{Erf}(x + at + 1) + \mathrm{Erf}(x\right.$$

График решения

На профиле струны образуются два горба, разбегающиеся от закрепленной точки в противоположные стороны со скоростью a.



Вопрос № 4

Задача о возбуждении щипком: Сравнение методов Фурье и Даламбера

Метод Фурье и формула Даламбера

Решение задачи о колебании струны, полученное по методу Фурье, как можно подумать, противоречит утверждению, полученному в пред. разделе, о том, что любое решение уравнение колебаний имеет вид $F_1(x - at) + F_2(x + at)$. Однако в действительности ряд Фурье можно привести к такому виду.

Преобразование ряда Фурье

Решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < l,\ t > 0) \\ u\big|_{t=0} = \varphi, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

по методу Фурье дается рядом

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \cos\frac{a\pi n t}{l} \sin\frac{\pi n x}{l},$$

который можно преобразовать как

$$u = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \left(\sin\frac{\pi n(x+at)}{l} + \sin\frac{\pi n(x-at)}{l} \right).$$

Преобразование ряда Фурье-2

Если продолжить φ с отрезка $[0, l]$ на отрезок $[-l, 0]$ нечетным образом, а далее на всю ось x с периодом $2l$, то формула

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

будет верна при всех $x \in \mathbb{R}$. Это позволяет переписать формулу

$$u = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \left(\sin \frac{\pi n (x + at)}{l} + \sin \frac{\pi n (x - at)}{l} \right).$$

как

$$u = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2},$$

что и должно быть по формуле Даламбера.

Метод Даламбера решения задачи о возбуждении струны

Алгоритм

Для того, чтобы решить задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < l,\ t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

следует продолжить функцию φ с отрезка $0 < x < l$ нечетным $2l$-периодическим образом и написать

$$u = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}.$$

Пример № 1

Для задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < \pi,\, t > 0) \\ u|_{t=0} = \sin^3(x), \quad u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \end{cases}$$

сразу можно написать

$$u = \frac{\sin^3(x - at) + \sin^3(x + at)}{2},$$

поскольку $\sin^3(x)$ – сама по себе нечетная 2π периодическая функция.

Пример № 2

Внешне похожую на нее задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < \pi, \, t > 0) \\ u|_{t=0} = \sin^2(x), \quad u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \end{cases}$$

нельзя решить в конечном виде. Дело в том, что четную функцию $\sin^2(x)$ нужно продолжить с отрезка $[0, \pi]$ нечетным образом через $x = 0$, для этого или придется задавать ее различными выражениями на отрезках $[\pi n, \pi(n+1)]$, или разложить в бесконечный ряд Фурье по синусам, что, собственно говоря, и предлагается сделать в методе Фурье.

Операция продолжения

В `giac`, как, вероятно, и в любой современной системе компьютерной алгебры, нечетное $2l$-периодическое продолжение произвольной функции φ, заданной на отрезке $0 < x < l$, можно записать при помощи двух функций – `frac` (взятие дробной части) и `piecewise`.

Операция продолжения-2

Первая позволяет задать $2l$-периодическую функцию

$$\theta(x) = 2\mathtt{frac}\left(\frac{x-l}{2l}\right) - 1,$$

равную x на отрезке $-l < x < l$, а вторая – продолжить φ на отрезок $-l < x < 0$ нечетным образом:

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 < x < l \\ -\varphi(-x), & -l < x < 0 \end{cases}$$

Комбинация этих функций

$$\hat{\varphi}(x) = g(\theta(x))$$

как раз и будет $2l$-периодической нечетной функцией, совпадающей с $\varphi(x)$ на отрезке $0 < x < l$.

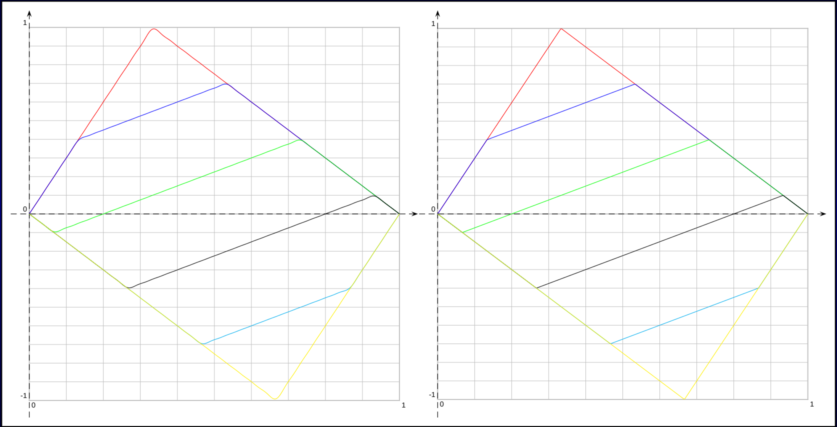
Решение задачи о возбуждении щипком

Файл Task-3.xws ▸ Запустить

```
restart;
c:=1/3; h:=1;
phi:=x->piecewise(x < c, h*x/c, h*(1-x)/(1-c));
g:=x->piecewise(x<0,-phi(-x),phi(x));
theta:=x->2*(frac((x-1)/2)-1/2);
f:=x->g(theta(x))
u:=(f(x+t)+f(x-t))/2;
animate(u,x=0..1,t=0..2,frame=30);
```

Ср.: Файл Task-2.xws ▸ Запустить

Сравнение методов Фурье и Даламбера



Мгновенные профили струны, которые дает метод Фурье (слева) и метод Даламбера (справа): различия заметны лишь в точках излома, которые метод Фурье сглаживает.

Сравнение методов Фурье и Даламбера-2

С точки зрения простоты построения мгновенных профилей струны метод Фурье много проигрывает методу Даламбера, который дает точное решение и не требует суммирования какого либо пусть даже и сходящегося ряда, а, следовательно, экономит машинные ресурсы. Во времена Фурье, напротив, метод Даламбера казался несовершенным, поскольку лишь метод Фурье давал решение в виде единого «аналитического выражения». Дело в том, что тогда в список элементарных функций входили только аналитические функции, что лишало возможности записать нечетное $2l$-периодическое продолжение в конечном виде.

Домашняя работа

Выполненную домашнюю работу следует собрать в один pdf-файл и послать по адресу `mmph@narod.ru`, указав в теме письма номер группы. В ответ придут замечания и комментарии. После одной такой итерации работа будет *опубликована* на сайте `http://mmph.narod.ru`.

Домашняя задача № 1

Сравните решения задачи о возбуждении щипком

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < l,\ t > 0) \\ u|_{t=0} = \sin^2 \dfrac{\pi x}{l}, \quad u_t|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

методами Фурье и Даламбера. Допускает ли эта задача классическое решение?

Домашняя задача № 2

Как воспользоваться формулой Даламбера для решения задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < \pi,\ t > 0) \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0 \end{cases} \qquad ?$$

Ссылки

- Музыкальная акустика. Под ред. *Н.А. Грабузова*. М.: Музгиз, 1954.
- *Liouville J.* Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes. // Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. XIII, Hft. 2., pag. 93 - 118.
- *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физики. Подойдет любое издание, напр., М.: «Наука», 2004 г.
- *Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Задачи по математической физики. Изд-во МГУ, 1994.
- *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Подойдет любое издание, напр., 6-е изд. М., Изд-во МГУ, 1999.

Конец

Илл. на стр. **??** взята из миланского издания 1492 года «Theorica musicae» Гафурия.

Илл. на стр. **??** взята из кн. Bibliothek allgemeinen und praktischen Wissens für Militäranwärter. Band III. Deutsches Verlaghaus Bong & Co.: Berlin-Leipzig-Wien-Stuttgart, 1905.