

Семинары № 10. Возбуждение колебаний

М.Д. Малых

Материалы к семинарским занятиям на ФФ МГУ.

Версия от 3 октября 2012 г.

Содержание

1	Возбуждение колебаний	1
1.1	Возбуждение мембраны ударом и щипком	4
1.2	Возбуждение мембраны периодически меняющейся силой . .	10

1 Возбуждение колебаний

Вынужденные колебания мембраны описываются, в полной аналогии со струной, начально-краевой задачей для уравнений колебаний:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + f, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u|_{t=0} = g(x, y), \quad u_t|_{t=0} = h(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

По теореме Стеклова, классическое решение этой задачи, если оно вообще существует, может быть разложено в сходящийся хотя бы в среднем ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x, y)$$

по собственным функциям φ_n мембраны, причем коэффициенты этого ряда даются формулой

$$u_n = \int_{\Omega} u(x, y, t) \varphi_n(x, y) dx dy,$$

если условится, что собственные функции отнормированы:

$$\int_{\Omega} \varphi_n^2 dx dy = 1.$$

Умножив уравнение колебаний на φ_n и проинтегрировав по всей области, получим дифференциальное уравнение для отыскания u_n . В самом деле, имеем

$$\int_{\Omega} u_{tt} \varphi_n dx dy = \int_{\Omega} \Delta u \varphi_n dx dy + \int_{\Omega} f \varphi_n dx dy.$$

В силу формулы Гаусса-Остроградского

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u \varphi_n dx dy &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u) \varphi_n dx dy = \\ &= \int_{\Omega} [\operatorname{div}(\varphi_n \nabla u) - (\nabla u, \nabla \varphi_n)] dx dy = \\ &= \int_{\partial \Omega} \varphi_n \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \varphi_n) dx dy \end{aligned}$$

Здесь интеграл по границе равен нулю, так как на границе собственные функции обращаются в нуль. Аналогично,

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi_n dx dy = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \varphi_n) dx dy$$

причем и здесь интеграл по границе обращается в нуль, но теперь в силу того, что решение u задачи (1) на границе равно нулю. Поэтому

$$\int_{\Omega} \Delta u \varphi_n dx dy = \int_{\Omega} u \Delta \varphi_n dx dy = -\lambda_n \int_{\Omega} u \varphi_n dx dy = -\lambda_n u_n = -\omega_n^2 u_n,$$

где ω_n – собственные частоты мембраны. Остается заметить, что

$$\int_{\Omega} u_{tt} \varphi_n dx dy = \frac{d^2}{dt^2} u_n.$$

В итоге, получается, что

$$\ddot{u}_n + \lambda_n u_n = f_n, \quad \text{где } f_n = \int_{\Omega} f \varphi_n dx dy.$$

Начальные условия, как и для струны, дают начальные условия для этого обыкновенного дифференциального уравнения:

$$u_n|_{t=0} = \int_{\Omega} u|_{t=0} \varphi_n dx dy = \int_{\Omega} g \varphi_n dx dy = g_n$$

и

$$\dot{u}_n|_{t=0} = \int_{\Omega} u_t|_{t=0} \varphi_n dx dy = \int_{\Omega} h \varphi_n dx dy = h_n.$$

Таким образом, классическое решение задачи (1) дается сходящимся в среднем рядом

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x, y), \quad (2)$$

коэффициенты которого однозначно определяются из задач Коши

$$\ddot{u}_n + \omega_n^2 u_n = f_n, \quad u_n|_{t=0} = g_n, \quad \dot{u}_n|_{t=0} = h_n, \quad (3)$$

где

$$f_n(t) = \int_{\Omega} f \varphi_n dx dy, \quad g_n = \int_{\Omega} g \varphi_n dx dy, \quad h_n = \int_{\Omega} h \varphi_n dx dy. \quad (4)$$

Практическое вычисление решения затруднено необходимостью вычисления этих интегралов. Часто оказывается удобно отказаться от условия

$$\int_{\Omega} \varphi_n^2 dx dy = 1,$$

и вместо (4) прямо использовать то, что функции g , h и f всегда можно разложить в ряды

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n(x, y), \dots,$$

коэффициенты которых и нужно подставлять в 3. Их всегда можно найти, используя ортогональность собственных функций:

$$\int_{\Omega} g \varphi_m dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \int_{\Omega} \varphi_n \varphi_m dx dy = g_m \int_{\Omega} |\varphi_m|^2 dx dy.$$

1.1 Возбуждение мембраны ударом и щипком

Формула (2) весьма удобна для качественного описания колебаний мембраны, возбужденных ударом или щипком. Эти колебания описываются задачей

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u|_{t=0} = g(x, y), \quad u_t|_{t=0} = h(x, y), \end{cases} \quad (5)$$

решением которой дается рядом

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n \cos(\omega_n t) + \frac{h_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right] \varphi_n(x, y), \quad (6)$$

то есть представляет собой суперпозицию собственных колебаний. В частности, спектральный анализ звука, издаваемого колеблющейся мембраной, должен выделить дискретный набор, состоящий из ее собственных частот.

Для примера рассмотрим колебания круглой мембраны, возбужденной симметричным щипком:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & r < 1 \\ u|_{r=1} = 0 \\ u|_{t=0} = f(r), \quad u_t|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

Мы знаем, что все собственные частоты круга исчерпываются набором

$$j_{n,m}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots$$

и им соответствуют собственные функции

$$J_n(j_{n,m}r)(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

но не знаем, в каком порядке их перенумеровать. Однако для решения задачи это и не важно – сумму по n в (12) можно заменить на двойную сумму по n и m . Иными словами, решение всегда можно разложить в ряд

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(j_{n,m}r)(f_{n,m}^c \cos n\varphi + f_{n,m}^s \sin n\varphi) \cos(j_{n,m}t),$$

где $f_{n,m}^c$ – коэффициент ряда для f , то есть

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(j_{n,m}r) (f_{n,m}^c \cos n\varphi + f_{n,m}^s \sin n\varphi).$$

Но f по условию не зависит от φ , поэтому все коэффициенты $f_{n,m}^c, f_{n,m}^s$ равны нулю при $n > 0$.¹ Это позволяет опустить во всех нижеследующих формулах индекс n , всюду равный нулю. Итак, решение (7) разлагается в ряд

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m J_0(j_{0,m}r) \cos(j_{0,m}t),$$

где f_m – коэффициент ряда для f :

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m J_0(j_{0,m}r).$$

Отсюда видно, что колебания, возбужденные симметричным щипком, составлены из собственных колебаний с частотами $j_{0,m}$. С тем, чтобы представить себе этот набор, заметим, что при $x > 2$ с графической точностью² верно

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (8)$$

(ср. рис. 1). Поэтому

$$j_{0,m} \approx \pi m - \frac{\pi}{4}.$$

¹Это можно доказать и из формулы (4), которая в данном случае дает

$$f_{n,m}^c = \iint_{\Omega} f(r) J_n(j_{n,m}r) \cos n\varphi r dr d\varphi : \iint_{\Omega} |J_n(j_{n,m}r)|^2 \cos^2 n\varphi r dr d\varphi,$$

т.к.

$$\iint_{\Omega} f(r) J_n(j_{n,m}r) \cos n\varphi r dr d\varphi = \int_0^1 J_n(j_{n,m}r) f(r) r dr \int_0^{2\pi} \cos n\varphi d\varphi$$

равен нулю при $n > 0$.

²В [1], гл. IX, §2.10, доказывається, что

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}),$$

то есть сказанное верно при достаточно больших x . Замечательно, что эти «достаточно большие» x начинаются с $x = 2$.

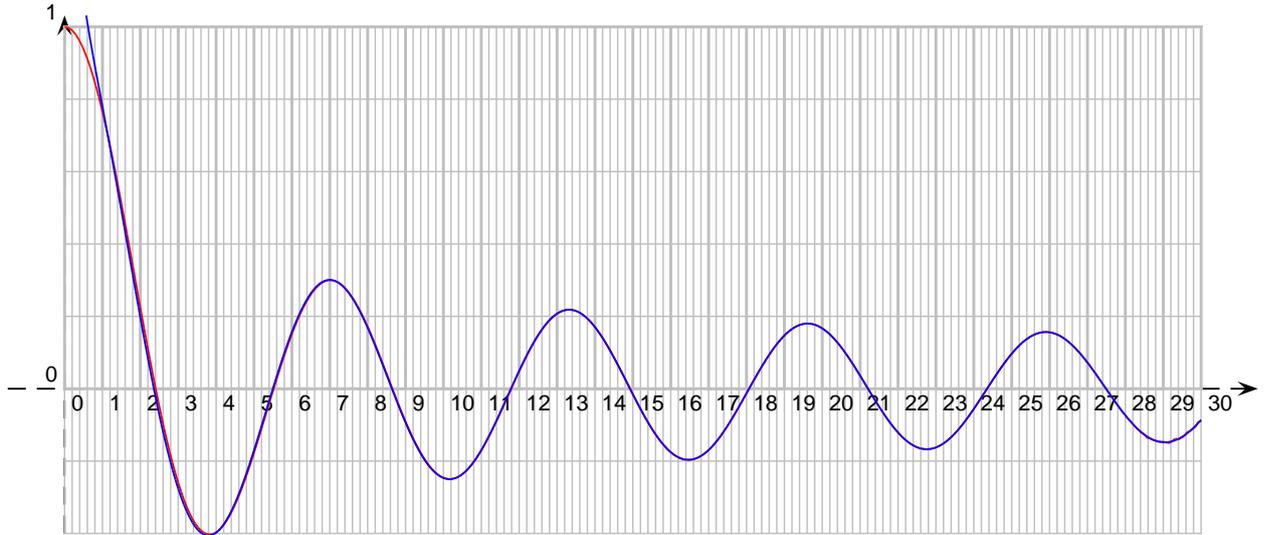


Рис. 1: Графики функций $J_0(x)$ и $\sqrt{2/\pi x} \cos(x - \frac{\pi}{4})$.

Ошибка этой формулы для $m = 1$ составляет 2% от $j_{0,m}$, и становится еще меньше с ростом m . Таким образом, частоты так возбужденной круглой мембраны образуют сдвинутый на $\frac{\pi}{4}$ гармонический ряд.

Обратимся теперь к вопросу о вычислении f_m . Имеем:

$$f_m = \int_0^1 J_0(j_{0,m}r) f(r) r dr : \int_0^1 |J_0(j_{0,m}r)|^2 r dr$$

или, сделав замену переменной $x = j_{0,m}r$,

$$f_m = \int_0^{j_{0,m}} J_0(x) f(x/j_{0,m}) x dx : \int_0^{j_{0,m}} |J_0(x)|^2 x dx.$$

Иногда интеграл от функции Бесселя удается вычислить явно, воспользовавшись тем, что эта функции удовлетворяет уравнению Бесселя

$$\frac{1}{x}(xJ_0'(x))' + J_0(x) = 0$$

и поэтому

$$xJ_0(x) = -(xJ_0'(x))'. \quad (9)$$

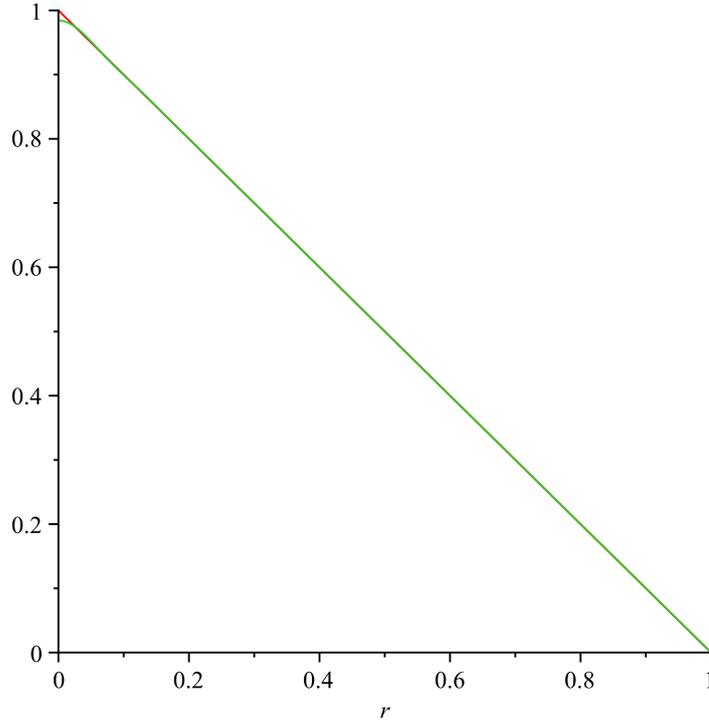


Рис. 2: Графики функций $1 - r$ и суммы первых 20 членов ее ряда Фурье.

Применительно к интегралу, стоящему в знаменателе, имеем:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{j_{0,m}} J_0^2(x) x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{j_{0,m}} J_0^2(x) dx^2 = \\
 &= \frac{1}{2} x^2 J_0^2(x) \Big|_{x=0}^{j_{0,m}} - \int_0^{j_{0,m}} x^2 J_0(x) J_0'(x) dx = \\
 &= - \int_0^{j_{0,m}} (x J_0(x)) x J_0'(x) dx = \int_0^{j_{0,m}} x J_0'(x) (x J_0'(x))' dx = \\
 &= \frac{1}{2} (j_{0,m} J_0'(j_{0,m}))^2.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f_m = 2(j_{0,m} J_0'(j_{0,m}))^{-2} \int_0^{j_{0,m}} J_0(x) f(x/j_{0,m}) x dx.$$

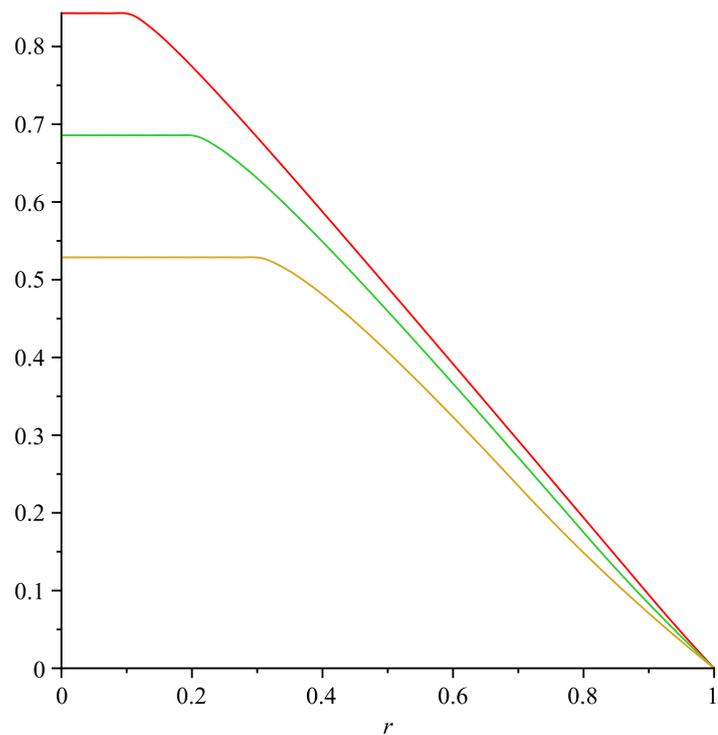


Рис. 3: Графики решения при $t = 0.1$ (красный), $t = 0.2$ (зеленый) и $t = 0.3$ (желтый). Для построения взято 100 членов ряда Фурье.

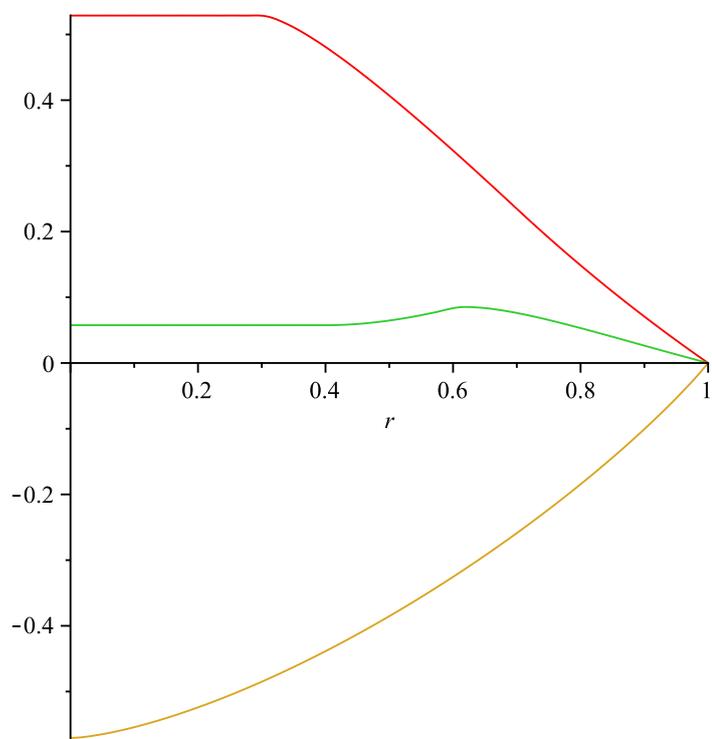


Рис. 4: Графики решения при $t = 0.3$ (красный), $t = 0.6$ (зеленый) и $t = 1$ (желтый).

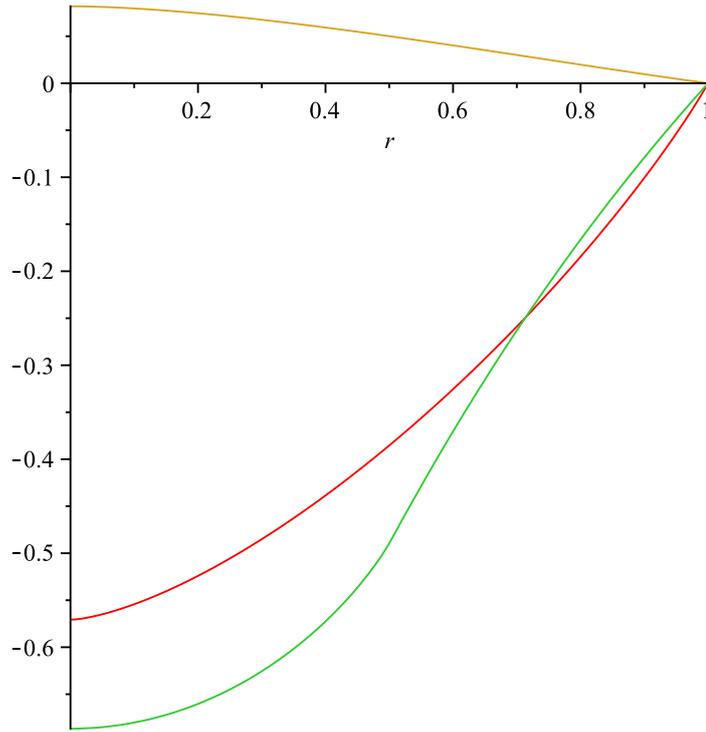


Рис. 5: Графики решения при $t = 1$ (красный), $t = 1.5$ (зеленый) и $t = 2$ (желтый).

Напр., если начальный профиль мембраны был конусом с вершиной в нуле, скажем

$$u|_{t=0} = 1 - r,$$

то

$$f_m = 2(j_{0,m} J_0'(j_{0,m}))^{-2} \int_0^{j_{0,m}} J_0(x) (1 - x/j_{0,m}) x dx.$$

Вычислив этот интеграл численно³ можно проверить выполнение равенства

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m J_0(j_{0,m} r),$$

сравнив графики функции f и частичной суммы ряда (см. рис. 2). На рис.

³На самом деле Maple выражает его через функции Струве (**StruveH**), то есть решения неоднородного уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = Cx.$$

3-5 представлены графики частичных сумм решения

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m J_0(j_{0,m}r) \cos(j_{n,m}t)$$

при различных t ; движение мембраны можно описать так. Как и в случае струны задача не имеет классического решения или, по крайней мере, его вторые производные весьма велики (см. рис. 3). В начале центре мембраны образуется плоский параллельный основанию пяточек, который расширяется и движется к основанию, на границе пяточка решение имеет разрыв производной (точно так вела себя и струна, возбужденная симметричным щипком), однако еще до достижения положения равновесия волна, отразившаяся от границы мембраны размывает границу пяточка ($t = 0.6$) и после этого мгновенный профиль мембраны становится гладким. Описать дальнейшее развитие событий трудно, поскольку колебания складываются из большого числа функций, периоды которых несоизмеримы. В частности, поэтому движение не будет периодическим, но только ограниченным.

1.2 Возбуждение мембраны периодически меняющейся силой

Колебания мембраны, возбужденные периодически меняющейся силой, описываются задачей

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + f(x, y) \sin \omega t, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (10)$$

Сама сила f может быть сосредоточена на небольшом участке мембраны, как, напр., в известном опыте, когда точка мембраны соединена нитью с камертоном⁴, или же равномерно распределена по всей мембране, как, напр., при периодическом изменении давления с одной из сторон мембраны. Эта задача может использоваться для описания колебаний динамика (и тогда частота ω много больше $j_{0,1}$).

⁴См. Хвольсон О.Д. Курс физики. Т.2. СПб., 1898, стр. 60.

Задача Коши

$$\{\ddot{v} + \omega_0^2 v = f \sin \omega t, \quad v|_{t=0} = 0, \dot{v}|_{t=0} = 0 \quad (11)$$

имеет своим решением

$$v = \frac{\omega_0 \sin(\omega t) - \omega \sin(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{f}{\omega_0},$$

поэтому решение задачи 10 дается рядом

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n \sin(\omega t) - \omega \sin(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega^2} \frac{f_n}{\omega_n} \varphi_n(x, y). \quad (12)$$

Отсюда видно, что колебания, возбужденные периодической силой, частота которой отлична от собственных частот мембраны, будут тоже ограниченными при всех t ; при совпадении же частоты ω возбуждающей силы с одной или несколькими кратными собственными частотами будет иметь место явление резонанса. Напр., при $\omega = \omega_1$

$$u = \frac{\sin(\omega_1 t) - t\omega_1 \cos(\omega_1 t)}{2\omega_1^2} f_1 \varphi_1(x, y) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\omega_n \sin(\omega t) - \omega \sin(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega^2} \frac{f_n}{\omega_n} \varphi_n(x, y).$$

Поэтому при

$$f_1 = \int_{\Omega} f(x, y) \varphi_1 dx dy \neq 0$$

со временем первый член превзойдет все прочие и

$$u \approx -\frac{f_1}{2\omega_1} t \cos(\omega_1 t) \varphi_1(x, y),$$

то есть амплитуда колебаний будет расти как t . Явление резонанса удобно использовать, чтобы наблюдать то или иное собственное колебание: если посыпать мембрану порошком и медленно менять частоту возбуждающей силы, то порошок при совпадении частоты с собственной будет выстраиваться вдоль узловых линий соответствующей собственной функции.

Для примера, обратимся теперь к случаю круглой мембраны единичного радиуса, на которую оказывается периодическое давление с одной из

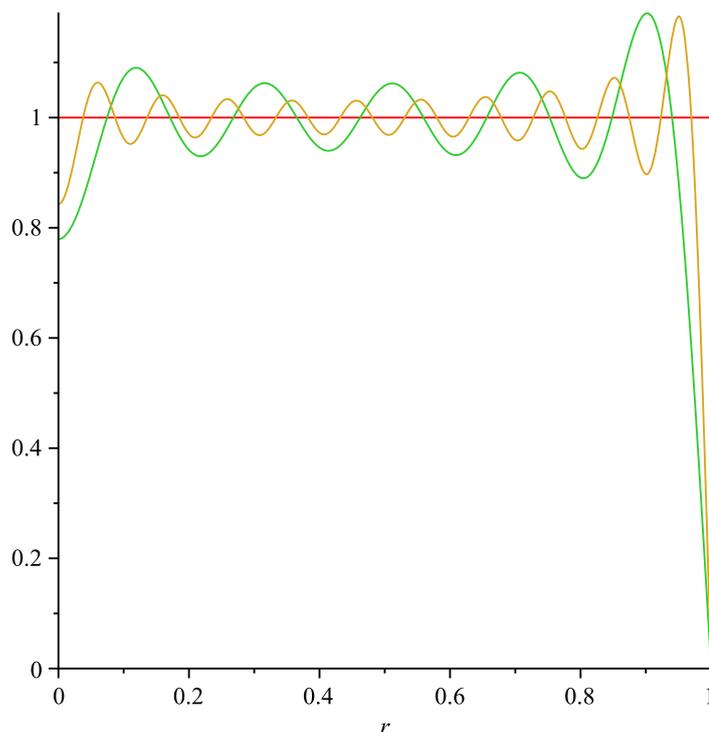


Рис. 6: Графики функций $f(r) \equiv 1$ и суммы первых 10 и 20 членов ее ряда Фурье.

сторон:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + p \sin(\omega t), & r < 1 \\ u|_{r=1} = 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (13)$$

Начнем с того, что постоянную функцию $f(x, y) = 1$ нужно разложить в ряд Фурье

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(j_{n,m}r) (f_{n,m}^c \cos n\varphi + f_{n,m}^s \sin n\varphi),$$

эта функция не зависит φ , поэтому опять все коэффициенты $f_{n,m}^c, f_{n,m}^s$ равны нулю при $n > 0$ ⁵, то есть

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m J_0(j_{0,m}r).$$

⁵Любопытно заметить, что f не зависит и от r то же, но это не уменьшает число членов ряда, поскольку у нас нет собственных функций, не зависящих от r .

Но тогда

$$f_m = \int_0^{j_{0,m}} J_0(x) x dx : \int_0^{j_{0,m}} |J_0(x)|^2 x dx;$$

интеграл, стоящий в знаменателе мы уже считали в пред. разделе, а интеграл в числителе легко берется, поскольку в силу уравнения Бесселя

$$\frac{1}{x}(xJ_0'(x))' + J_0(x) = 0$$

подынтегральное выражение является полным дифференциалом

$$xJ_0(x) = -(xJ_0'(x))',$$

и поэтому

$$\int_0^{j_{0,m}} J_0(x) x dx = -xJ_0'(x)|_{x=0}^{j_{0,m}} = -j_{0,m}J_0'(j_{0,m}).$$

В итоге имеем

$$f_m = -j_{0,m}J_0'(j_{0,m}) : \frac{1}{2}(j_{0,m}J_0'(j_{0,m}))^2 = -\frac{2}{j_{0,m}J_0'(j_{0,m})}.$$

Выполнение формулы

$$1 = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2J_0(j_{0,m}r)}{j_{0,m}J_0'(j_{0,m})}. \quad (14)$$

можно проверить (см. рис. 6). Этот ряд должен сходиться в среднем к 1, но его коэффициенты убывают весьма медленно. Заменяя J_0 на ее приближенное значение (8), годное при больших x , имеем

$$f_m \approx \frac{2\sqrt{2}(-1)^{m+1}}{\sqrt{4m-1}}.$$

Разумеется, при $r = 0$ и $r = 1$ наблюдается явление Гиббса.

Обратимся теперь к разложению решения (13) в ряд

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(j_{n,m}r)(u_{n,m}^c(t) \cos n\varphi + u_{n,m}^s(t) \sin n\varphi),$$

коэффициенты $u_{n,m}$ и $v_{n,m}$ определяются как решения задач Коши

$$\{\ddot{u}_{n,m}^c + j_{n,m}^2 u_{n,m}^c = f_{n,m}^c p \sin(\omega t), \quad u_{n,m}^c|_{t=0} = g_{n,m}^c p \sin(\omega t), \quad \dot{u}_{n,m}^c|_{t=0} = h_{n,m}^c,$$

а $f_{n,m}^c$ – все тот же коэффициент ряда для функции $f \equiv 1$. Коль скоро все коэффициенты $f_{n,m}^c$, $f_{n,m}^s$ равны нулю при $n > 0$, при таких n для $u_{n,m}^c$, $u_{n,m}^s$ получается однородная задача Коши, то есть

$$u_{n,m}^c = u_{n,m}^s = 0 \quad (n > 0).$$

Опуская индекс n , всюду равный нулю, имеем

$$\{\ddot{u}_m + j_{n,m}^2 u_{n,m} = f_m^c p \sin(\omega t), \quad u_m|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_m|_{t=0} = 0,$$

откуда, взяв f_m из (14), имеем

$$u_m = -\frac{j_{0,m} \sin(\omega t) - \omega \sin(j_{0,m} t)}{j_{0,m}^2 - \omega^2} \frac{2p}{j_{0,m}^2 J_0'(j_{0,m})}.$$

Таким образом, решение задачи (13), если оно вообще существует, дается сходящимся в среднем рядом

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2p}{j_{0,m}^2 J_0'(j_{0,m})} \frac{j_{0,m} \sin(\omega t) - \omega \sin(j_{0,m} t)}{j_{0,m}^2 - \omega^2} J_0(j_{0,m} r).$$

Поскольку коэффициенты f_m убывают медленно, решение представляет собой суперпозицию большого числа колебаний с несоизмеримыми частотами и близкими амплитудами, описать наложение которых весьма затруднительно. Понятно лишь, что при приближении ω к собственной частоте $j_{0,m}$ m -ая мода станет самой заметной, а профиль колебания обретет форму соответствующей собственной функции.

Список литературы

Основная

- [1] СВЕШНИКОВ А.Г., БОГОЛЮБОВ А.Н., КРАВЦОВ В.В. Лекции по математической физики. Подойдет любое издание, напр., М.: «Наука», 2004 г.

- [2] БОГОЛЮБОВ А.Н., КРАВЦОВ В.В. Задачи по математической физики. Изд-во МГУ, 1994.

Дополнительная

- [3] КУРАНТ Р., ГИЛЬБЕРТ Д. Методы математической физики. Т. 1, М., 1933; Т. 2, М., 1945.
- [4] ТИХОНОВ А.Н., САМАРСКИЙ А.А. Уравнения математической физики. Подойдет любое издание, напр., 6-е изд. М., Изд-во МГУ, 1999.
- [5] ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.



© 2012 г., Михаил Дмитриевич Малых.

Текст доступен на условиях лицензии Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Свежая версия доступна на сайте <http://mmph.narod.ru/>.