Методы математической физики

Семинар № 1. Колебания струны: метод Фурье.

Мих. Дмитр. Малых

Физический факультет МГУ

2012/13 уч. г., версия от 12 июня 2012 г.

Предуведомление

Настоящий файл – всего лишь собрание слайдов, показ которых будет сопровождать проведение семинара по курсу ММФ в 303 гр. ФФ МГУ в 2012/13 уч. г. на правах эксперимента. К нему приложены все демонстрируемые программы и прочие материалы[1].
Я не рекомендую студентам переписывать слайды себе в тетради, а напротив призываю заранее скачивать слайды с сайта `http://mmph.narod.ru`, слушать и делать пометки, благо `Adobe Reader 10` поддерживает функцию комментирования.

М.Д. Малых, 1 июня 2012 г.

[1] Adobe Reader: View -> Navigation Panels -> Attachments

О курсе ММФ

Курс ММФ читается один семестр. На семинары будет вынесено решение след. задач:

1. О колебании струны
2. О стационаром распределении тепла
3. Первая краевая задача для уравнения Пуассона
4. О колебании мембраны
5. Об нестационарном распределении тепла
6. О заземленной полости
7. Об уравнении Шредингера

Тестирование планируется провести в середине октября по задачам № 1-3 и в конце семестра по задачам № 4-6. На зачете будет обсуждаться выполнение домашнего задания.

Вопрос № 1.

Уравнение колебаний струны

Историческое вступление

Согласно древней басне, переданной *Ямвлихом* [1], зависимость высоты звука от натяжения струны была выражена в пропорциях *Пифагором*. Однако верную зависимость высоты звука от параметров струны открыл опытным путем *Марен Мерсен* (Mersenne, 1636) лишь в XVII веке [2].

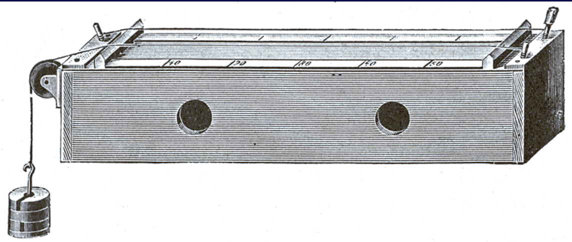
Илл. из миланского издания 1492 года «Theorica musicae» Гафурия.

Определение струны

Обычно *струну* определяют как *гибкую нить*, *О.Д. Хвольсон*[2] входит в большие подробности:

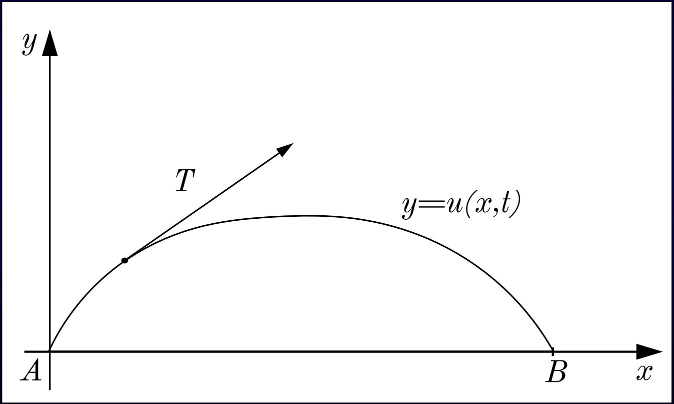
> *Струной в теории называется твердое нитевидное тело, площадь поперечного сечения которого вообще мала сравнительно с его длинной, и которое вовсе не сопротивляется изгибанию, так что изменение его формы, сохраняющее его длину, не вызывает в нем никаких упругих сил.*

Монохорд



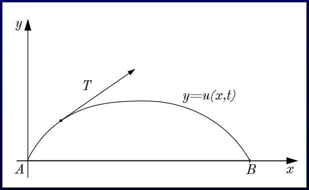
Здесь и далее ρ – плотность струны, l – длина, S – площадь поперечного сечения, T – натяжение.

Система координат



Натяжение

Натяжением T будем называть модуль силы, с которой кусок струны, бывшей в начальный момент времени между точками с абсциссами $x = 0$ и $x = x$, действует на оставшийся кусок струны. Математическое выражение понятия *гибкости* заключается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательным к ее мгновенному профилю.

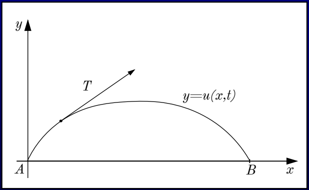


Натяжение

В физической литературе принимают за очевидное, что T постоянно вдоль струны и равно или весу груза, переделанного к струне, или определяет начальным натяжением, возникшим в результате закручивания колков.
В математической литературе полагают T функцией x и t и доказывают ее постоянство.

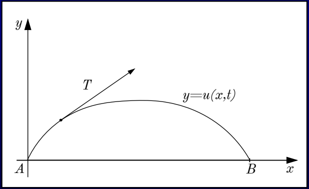
Предположение № 1

Струна совершает *поперечные колебания*, т.е. точка струны, имевшая в начальный момент времени координату $(x, 0)$, переместится в точку, координаты которой можно представить так $(x, u(x, t))$.
Мгновенный профиль описывается уравнением $y = u(x, t)$.



Предположение № 2

Струна совершает *малые колебания*. Тангенс угла наклона касательной к мгновенному профилю струны $y = u(x,t)$, скажем $\tan\alpha$, равен u_x. Будем считать эту величину малой.



Длина куска струны

В силу сделанных предположений

$$u_x^2 = \tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = \frac{u_x^2}{1-u_x^2} = u_x^2 + \ldots,$$

то есть

$$\sin\alpha \approx u_x, \quad \cos\alpha \approx 1.$$

Кусок струны, бывшей в начальный момент времени между точками с абсциссами $x = x_1$ и $x = x_2$, имеет длину

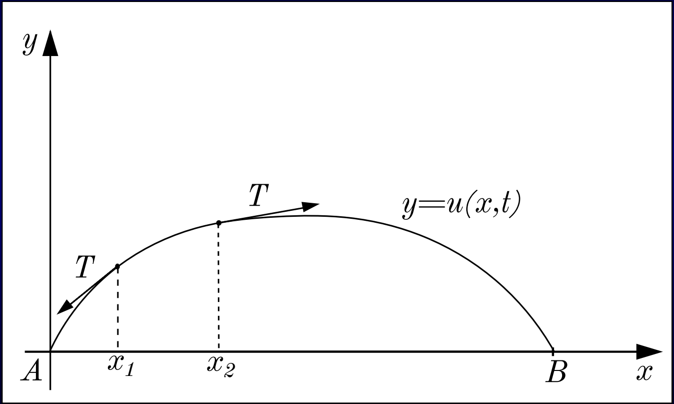
$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x^2}dx = x_2 - x_1,$$

которая, следовательно, не меняется со временем.

Закон Гука

Величина натяжения, возникающего вследствие упругости, описывается *законом Гука*.
Поскольку длины кусков струны не меняются со временем, натяжение T может завить разве только от x.

Внешние силы, действующие на кусок $x_1 < x < x_2$



2-ой закон Ньютона для оси абсцисс

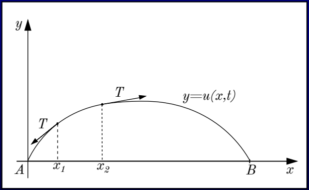
Кусок струны не должен двигаться вдоль оси абсцисс, поэтому

$$T(x)\cos\alpha\big|_{x=x_1} - T(x)\cos\alpha\big|_{x=x_2} = 0,$$

откуда

$$T(x_1) = T(x_2),$$

т.е. *натяжение постоянно вдоль струны*.



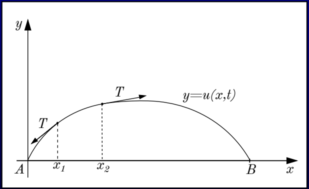
2-ой закон Ньютона для оси ординат

Проекция его импульса куска на ось y равна

$$S\int\limits_{x_1}^{x_2}\rho u_t dx,$$

в силу 2-го закона Ньютона, скорость ее изменения равна проекции сил на ось Oy, то есть

$$S\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1}^{x_2}\rho u_t dx = T[u_x(x_2,t)-u_x(x_1,t)];$$



2-ой закон Ньютона для оси ординат-2

Замечая, что

$$T[u_x(x_2,t)-u_x(x_1,t)]=\int\limits_{x_1}^{x_2} Tu_{xx}dx,$$

и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1}^{x_2}\rho u_t dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}\rho u_{tt}dx,$$

сразу имеем

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[S\rho u_{tt}-Tu_{xx}\right]dx=0.$$

Уравнение колебаний

В силу произвольности выбор точек x_1 и x_2 пред. равенство означает, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T}{S\rho}}.$$

Это и есть уравнение Ньютона, описывающее движение струны. Заметим, что это уравнение – уравнение в частных производных 2-го порядка; его, по понятным причинам, называют *уравнением колебаний*.

Вопрос № 2.

Собственные колебания

Гармоники

Поперечные колебания струны вида $u = u(x)\sin(\omega t + \theta)$ возможны лишь при дискретном наборе частот, составляющих т.н. гармонический ряд

$$\omega_1,\ \omega_2 = 2\omega_1,\ \omega_3 = 3\omega_1, \dots, \quad \text{где} \quad \omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{S\rho}}$$

Эти частоты называют *собственными частотами* струны. Гармонические колебания, возникающие при собственных частотах, называют *собственными модами* или *гармониками*.

Узлы

Мгновенный профиль струны n-ой моды имеет весьма приметный вид

$$y = C \sin \frac{\pi n x}{l} \sin(\omega_n t + \theta),$$

где C – оставшаяся неопределенной константа, и, следовательно, на струне имеется ровно n *пучностей*, между которыми лежат $n-1$ неподвижных точек, именуемых *узлами*.

Законы Мерсена

Единственная мода, не имеющая узловых точек, отвечает первой (наименьшей) собственной частоте

$$\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{Sl^2\rho}}.$$

Это формулы соединяет вмести 4-ре закона, найденные *Мерсеном* опытным путем.

Математическая сторона вопроса

Краевая задача

$$\{u'' + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(l) = 0 \tag{1}$$

имеет нетривиальные решения u только при дискретном наборе значений параметра λ, именуемых *собственными значениями* этой задачи, а именно

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}, \quad \lambda_2 = \lambda_1 2^2, \dots$$

Каждому собственному значению λ_n отвечает решение $u = C \sin \pi n x$, определенное с точностью до мультипликативной константы C, это решение, в котором обычно опускают константу, называют *собственной функцией*.

Вопрос № 3.

Возбуждение колебаний: метод Фурье

Возбуждение струны щипком и ударом

При возбуждении колебаний в начальный момент времени либо отклоняют струну от положения равновесия (щипок), либо придают ей начальную скорость при помощи удара (удар).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l,\, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0 \end{cases}$$

За классическое решение этой задачи принимают дважды непрерывно дифференцируемую функцию в области $\{0 < x < l$ и $t > 0\}$ и непрерывную в замыкании этой области $\{0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0\}$.

Корректность задачи

Причины, по которым берут именно столько краевых условий, требуют пояснения. Напр., раз конец $x = 0$ закреплен, то и $u_t(0) = 0$, но мы не добавляем это условие в формулировку задачу. Дело в том, что при составлении задачи математической физики следует стремится не перечислить все условия, а поставить математически корректную задачу.

Определение

Задача называется корректной по Адамару, если 1.) ее решение единственно, 2.) ее решение существует и 3.) ее решение устойчиво относительно малых изменений входных данных.

Идея метода Фурье

Еще в начале XIX века возникла идея, обычно связываемая с именем Фурье, искать u как суперпозицию гармоник:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t] \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где A_n и B_n подлежащие определению константы.
В те времена с бесконечными суммами работали так, как будто они конечные, не беспокоясь о сходимости. Заметив же, что нормальные моды

$$[A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t] \sin \frac{\pi n x}{l}$$

по отдельности удовлетворяют волновому уравнению, считали очевидным, что тоже верно и для их суммы, распространив тем самым принцип суперпозиции и на бесконечные суммы.

Идея метода Фурье-2

Подставив эту же сумму в начальные условия, получили, что константы A_n и B_n следует подобрать так, чтобы при всех $0 \le x \le l$ выполнялись равенства

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

и

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n A_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Так, собственно говоря, Фурье и пришел к мысли о возможности разложения произвольной функции в ряд по тригонометрическим функциям.

Основная теорема теории рядов Фурье

Произвольную функцию f, первая производная которой непрерывна на отрезке $0 \le x \le l$ и которая сама удовлетворяет граничным условиям

$$f(0) = f(l) = 0,$$

можно разложить в ряд Фурье по синусам

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (0 \le x \le l),$$

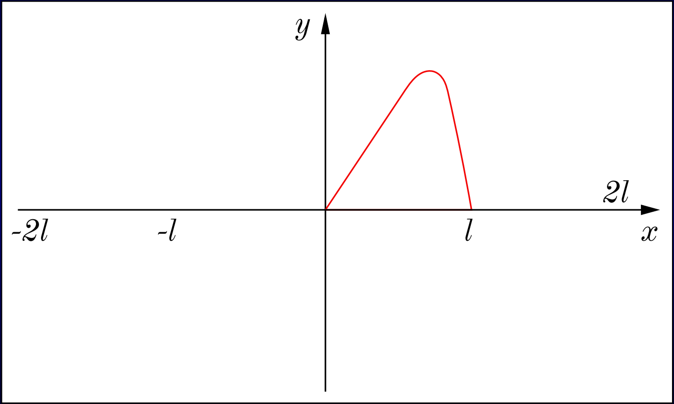
коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$f_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Первый способ доказательства

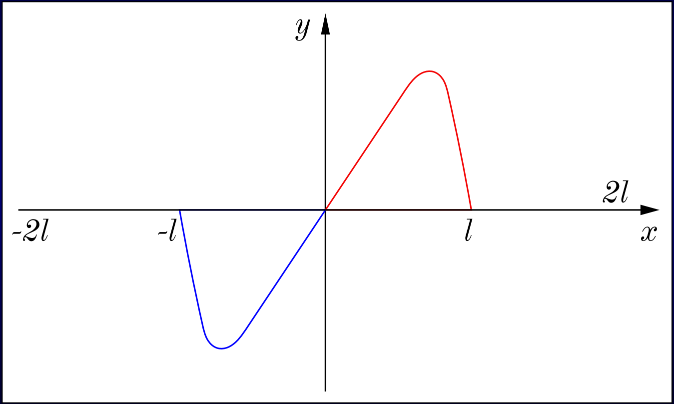
Доказательство основано на том, что функцию f можно продолжить до непрерывной нечетной $2l$-периодической функции, к которой применим, напр., признак Липшица, [3], т. 3, п. 684.

График функции



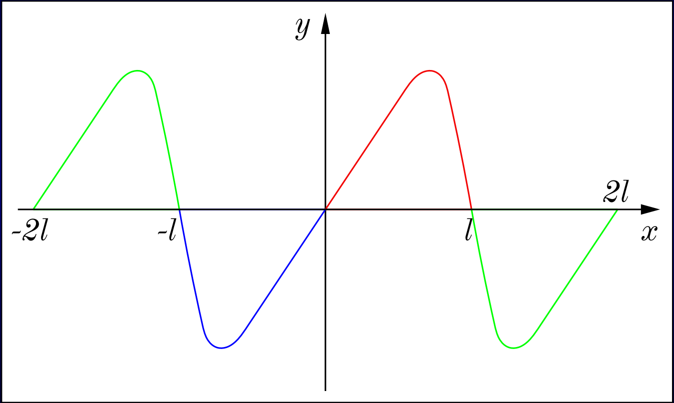
Функция f задана на отрезке $0 < x < l$.

Шаг № 1: нечетное продолжение



Условие $f(0) = 0$ дает, что в точке $x = 0$ нет разрыва.

Шаг № 2: продолжение с периодом $2l$



Условие $f(l) = 0$ дает, что в точках $x = ln$ нет разрывов.

Второй способ доказательства

В теории интегральных уравнений доказывалась теорема Стеклова, согласно которой система собственных функций задачи Штурма-Лиувилля полна.

Алгоритм решения задачи о возбуждении струны

Для того, чтобы по заданному начальному профилю струны и начальному распределению ее скоростей

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x)$$

найти мгновенный профиль струны $y = u(x,t)$ при всех $t > 0$, следует вычислить коэффициенты Фурье функций для φ и ψ по формулам

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \quad \psi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$$

и затем записать ответ в виде ряда по нормальным модам

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\psi_n}{\omega_n}\sin\omega_n t + \varphi_n\cos\omega_n t\right]\sin\frac{\pi n x}{l} \qquad (2)$$

Пример № 1

Удар молоточком

Удар молоточком

При игре на ударных музыкальных инструментах (напр., рояле) по струне ударяют молоточком, то есть сообщают небольшому куску струны в начальный момент времени некоторую начальную скорость. Простейший способ описать эту ситуацию, принять

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \begin{cases} v, & |x-c| < \delta \\ 0, & |x-c| > \delta \end{cases}$$

Система компютерной алгебры

Giac/Xcas – свободная система компьютерной алгебры (CAS) для Windows, Mac OS X и Linux/Unix, созданная Бернаром Парисом из Института Фурье (лицензия GPL3). Синтакис весьма схож с Maple.

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html

Решение и создание анимации в Giac/Xcas

Файл Task-1.xws

Запустить

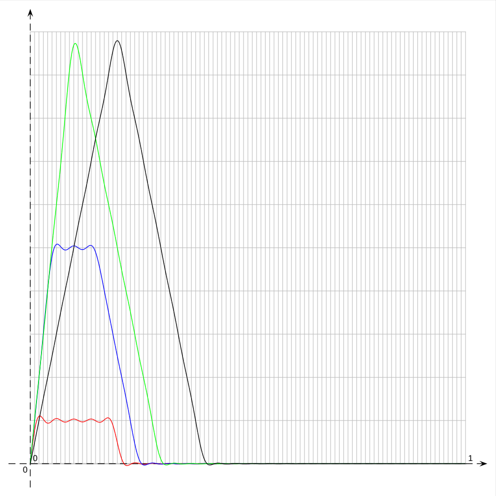
```
restart;
l:=1; a:=1; c:=l/10; delta:=0.1; v:=1;
psi:=piecewise(x<c-delta,0,x<c+delta,v,0);
assume(n,integer); psin:=simplify(2/l*int(psi*sin(Pi*n*x/l),x=0..l));
u:=sum(psin*sin(Pi*n*x/l)*sin(Pi*n*a*t/l)*(Pi*n*a/l)^(-1),n=1..50);
animate(u,x=0..l,t=0..2*l/a,frames=20);
```

Описание решения

При малых t в месте удара быстро возникает горб, который движется через центр струны к противоположному ее концу со скоростью a, от него отражается, опрокидывается, возвращается назад и снова опрокидывается.

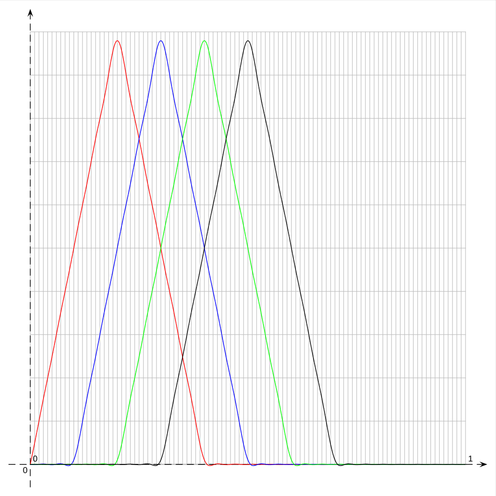
Возникновение горба

На рис. построены мгновенные профили струны длины при ударе молоточком толщины в $2\delta = 0.2l$ в точку $c = l/10$ при малых t: $t = 0.01l/a$ (красный), $t = 0.05l/a$ (синий), $0.1l/a$ (зеленый) и $t = 0.2l/a$ (черный).



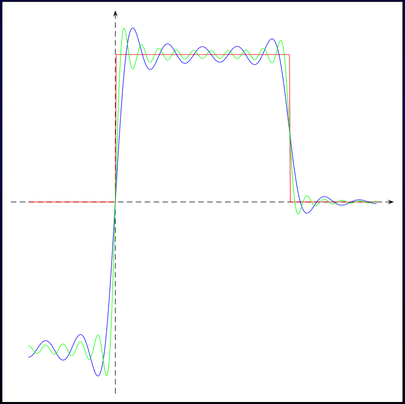
Движение горба

На рис. приведены мгновенные профили струны при ударе молоточком толщины в $2\delta = 0.2l$ в точку $c = l/10$ за первую четверть периода ее колебаний: $t = 0.2l/a$ (красный), $t = 0.3l/a$ (синий), $0.4l/a$ (зеленый) и $t = 0.5l/a$ (черный).



Явление Гиббса

Возле точек разрыва частичные суммы осциллируют с амплитудами, которые не стремятся к нулю с ростом числа членов частичных сумм.



Неклассичность решения

Коэффициенты Фурье профиля начальных скоростей

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} v\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{4v}{\pi}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n c}{l}\sin\frac{\pi n \delta}{l},$$

убывают всего лишь как n^{-1}. Поэтому ряд

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n}{\omega_n}\sin\omega_n t\sin\frac{\pi n x}{l}, \qquad (\omega_n \sim n)$$

равномерно по x и t сходится к непрерывной функции, но производная этой функции может иметь скачки (горб имеет форму треугольника).

Пример № 2

Щипок

Щипок

При игре на щипковых музыкальных инструментах (напр., арфе или гитаре) струны отклоняют в начальный момент в некотором месте струны $x = c$, а затем отпускают. Простейший способ представить себе эту ситуацию, допустить что в начальный момент времени профиль струны имел вид треугольника с вершиной (c, h), то есть

$$\varphi = \begin{cases} \frac{h}{c}x, & 0 < x < c \\ \frac{h(l-x)}{l-c}, & c < x < l, \end{cases} \tag{3}$$

а начальные скорости были равны нулю.

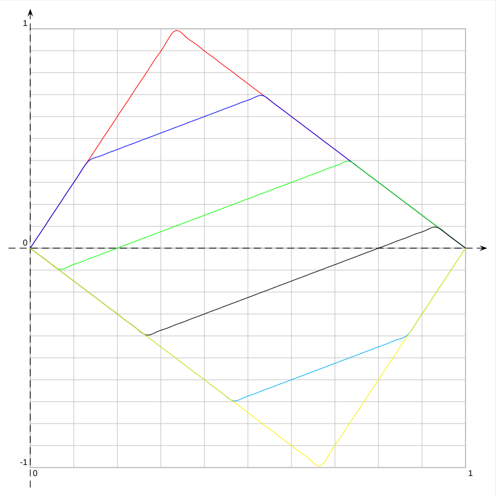
Решение и создание анимации в Giac/Xcas

Файл Task-2.xws ▸ Запустить

```
restart;
l:=1; a:=1; c:=l/3; h:=1; phi:=piecewise(x<c,x*h/c,(h/(l-c))*(l-x));
assume(n,integer); phin:=simplify(2/l*int(phi*sin(Pi*n*x/l),x=0..l));
u:=sum(phin*sin(Pi*n*x/l)*cos(Pi*n*a*t/l),n=1..50);
animate(u,x=0..l,t=0..2*l/a,frames=20);
```

Мгновенные профили при различных t

Мгновенные профили струны при возбуждении щипком (метод Фурье, $c = l/3$) за половину периода колебаний T: $t = 0$ (красный), $t = 0.2T$ (синий), $0.4T$ (зеленый), $t = 0.6T$ (черный), $0.8T$ (циан) и $t = T$ (желтый).



Описание решения

Максимум мгновенного профиля перемещается из точки (c, h) в симметричную относительно центра струны точку $(l - c, -h)$ и обратно.

«Гибкая нить» совершенно не сопротивляется изгибам, фактически все время представляя собой ломаную из трех звеньев, что мало похоже на поведение реальной струны.

Неклассичность решения

Функция φ непрерывна, но ее график имеет излом в точке $x = c$, поэтому ее коэффициенты Фурье

$$\varphi_n = \frac{2hl^2}{\pi^2 n^2 c(l-c)} \sin\frac{\pi n c}{l}$$

убывают всего лишь как n^{-2}, а значит ряд для решения

$$u = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{\pi n c}{l} \cos\omega_n t \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

дифференцировать по x или t нельзя.

Домашняя работа

Выполненную домашнюю работу следует собрать в один pdf-файл и послать по адресу `mmph@narod.ru`, указав в теме письма номер группы. В ответ придут замечания и комментарии. После одной такой итерации работа будет *опубликована* на сайте `http://mmph.narod.ru`.
Любители MSOffice 2007 могут выполнить все домашнее задание в нем, установив надстройки «Microsoft Mathematics для Word и OneNote» и «Сохранение в формате PDF».

Домашняя задача № 1

Решите задачу о возбуждении ударом, использовав в начальных условий более разумную гладкую функцию:

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \begin{cases} v \cos \frac{x-c}{\delta} \frac{\pi}{2}, & |x-c| < \delta \\ 0, & |x-c| > \delta \end{cases}$$

Нарисуйте мгновенные профили струны при различных t и опишите ход решение и укажите принципиальные отличия решения в этом случае, от разобранного выше.
Для справок: [6], прил. 1.

Домашняя задача № 2

Какие изменения следует внести в предложенное выше изложение метод Фурье с тем, чтобы решить начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < \pi,\ t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0 \end{cases} \qquad ?$$

Для справок: [5], стр. 283, № 1.

Ссылки

- *Ямвлих*. О Пифагоровой жизни. Пер. с древнегреч. *И.Ю. Мельниковой*. М.: Алетейа, 2002. Гл. XXVI.
- *Хвольсон О.Д.* Курс физики. Т. 2. СПб., 1898.
- *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления.
- *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физики. Подойдет любое издание, напр., М.: «Наука», 2004 г.
- *Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Задачи по математической физики. Изд-во МГУ, 1994.
- *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Подойдет любое издание, напр., 6-е изд. М., Изд-во МГУ, 1999.

Конец

© 2012 г., Михаил Дмитриевич Малых. Текст доступен на условиях лицензии Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Илл. на стр. 5 взята из миланского издания 1492 года «Theorica musicae» Гафурия.

Илл. на стр. 7 взята из кн. Bibliothek allgemeinen und praktischen Wissens für Militäranwärter. Band III. Deutsches Verlaghaus Bong & Co.: Berlin-Leipzig-Wien-Stuttgart, 1905.