Методы математической физики

Семинары № 3-4. Колебания струны: музыкальная акустика, корректность задачи.

Мих. Дмитр. Малых

Физический факультет МГУ

2012/13 уч. г., версия от 17 сентября 2012 г.

Вопрос № 1.

Спектральный состав звука, издаваемого струнами

Запись звука

При записи звука, издаваемого колеблющейся струной, в некотором месте записывают колебания давления воздуха на пластинку или какое-либо другое тело. Результат представляет собой график некоторой быстро осциллирующей функции от времени (график звукового сигнала). Раньше эту функцию записывали аналоговым образом прямо на пластинки, теперь, оцифровав, в звуковые файлы.

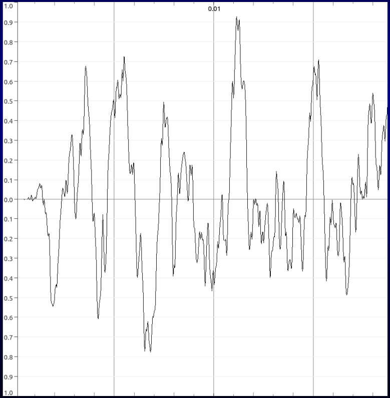
Sonic Visualiser

Для исследования спектрального состава музыкальных записей удобно использовать `Sonic Visualiser`, свободно распространяемый The Centre for Digital Music, Queen Mary, University of London.

`http://www.sonicvisualiser.org`

Нота До на рояле

Файл YC7-FC3-L-16.wav ▸ Запустить



В файл YC7-FC3-L-16.wav записан звук, возникающий при сильном ударе по клавише До первой октавы (c3) фортепиано.

Спектральный состав звука

Согласно методу Фурье профиль струны колеблется по закону

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t + \theta_n) \sin(\frac{\pi n}{l} x),$$

поэтому эта функция должна быть сложена из колебаний с частотами, образующими гармонический ряд

$$\omega_n = \frac{\pi a}{l} n, \quad n = 1, 2, \dots;$$

скажем иметь вид

$$f(t) = \sum B_n \sin(\omega_n t + \theta_n),$$

обычно предполагают, что величина амплитуды B_n n-ой гармоники пропорциональна амплитуде соответствующей гармоники струны A_n.

Восприятие звука

Частота первой гармоники, имеющей обычно наибольшую амплитуду, воспринимается в нашем сознании как высота звука, его *основной тон*. Прочие же гармоники, или обертона, воспринимаются как призвуки, окрашивающие основной тон; эту окраску обычно называют *тембром* звука.

Ноты

В акустике высоту звука указывают в герцах, в музыке – при помощи нот. При принятой ныне равномерной темперации ноте до первой октавы отвечает частота в 261,63 герца, ноте до следующей октавы отвечает частота в 2 раза большая, интервал между ними делят на 12 частей, именуемых полутонами, увеличивая частоту каждый раз в $\sqrt[12]{2}$ раз, обозначая части как до диез, ре, ре диез и так далее. При этом в логарифмической шкале октава делится на равные части.

Зоны

Согласно опытам, поставленным Н.А. Гарбузовым в МГК, мы воспринимаем как звук одного и того же названия целую область близких частот (зон), эта полоса частот колеблется в пределах $\pm\frac{1}{8}$ тона даже у профессиональных исполнителей. [1]

Оконное преобразование Фурье

Для выделения набора частот синусоид для заданного сигнала $f(t)$ строят график модуля функции

$$F(t,\omega) = \int\limits_{t-T}^{t+T} f(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau$$

в осях t (в секундах) и ω (в герцах). Этот график называют спектрограммой или сонограммой, а само преобразование – оконным преобразованием Фурье с тем, чтобы подчеркнуть его связь с преобразованием Фурье ($T = \infty$) и указать, что для вычисления образа F в точке t_0 нужно знать сигнал f не при всех t но лишь в окне $[t_0 - T, t_0 + T]$.

При больших T ...

При достаточно больших значениях параметра T образ имеет ярко выраженные максимумы при тех ω, которые отвечают частотам синусоид, слагающих f.
Для того, чтобы убедится в этом, достаточно вычислить интеграл

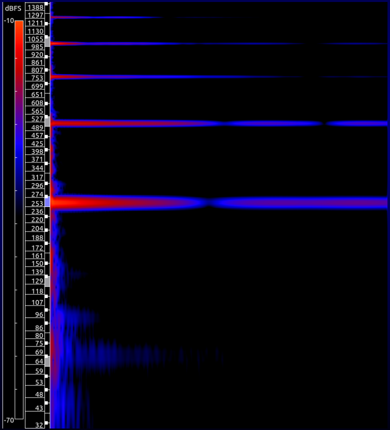
$$\int_{-T}^{T} \sin \omega_0 \tau e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{\sin(\omega_0 - \omega)T}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin(\omega_0 + \omega)T}{\omega + \omega_0}$$

С ростом T первый член, функция Sinc, будет иметь один все более и более выраженный максимум, а второй член накладывать на нее колебания, амплитуда которых не может расти.

Сонограмма звука рояля (нота до первой октавы)

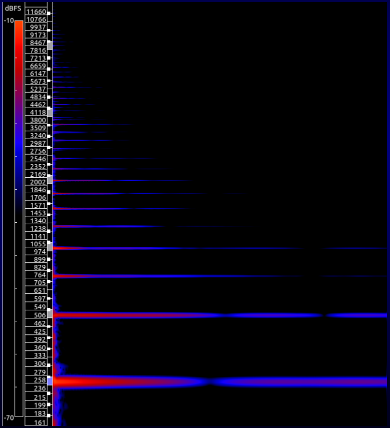
Файл YC7-FC3-L-16.wav ▸ Запустить

- Основной тон – нота до (261,4 герца);
- первый обертон дает до следующей октавы,
- второй – соль,
- третий – до 3-ей октавы,
- четвертый – ми,
- пятый – соль.



Обертона звука рояля (нота до первой октавы)

Первые пять обертонов дают в качестве призвуков ноты мажорного трезвучия, что придает всему звуку приятный оттенок, называемый обычно полнотою. Наоборот, шестой обертон попадает где-то между ля и ля диезом, что придает звуку неприятный оттенок, возникает диссонанс.



Борьба со старшими обертонами

При изготовлении музыкальных инструментов стремятся так возбуждать колебания струны, чтобы этот обертон (7 гармоника) не был слышен. В рояле для этого ударяют молоточком не в центре струны, а на расстоянии $\frac{1}{7}$ от конца струны, то есть в узел 7-ой гармоники.

Мат. модель удара молоточком

На семинаре № 1 удар молоточком толщины 2δ по струне в точке $x = c$ мы описали начально-краевой задачей

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l,\, t > 0) \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = \begin{cases} v, & |x-c| < \delta \\ 0, & |x-c| > \delta \end{cases} \end{cases}$$

Решение по методу Фурье

Коэффициенты Фурье профиля начальных скоростей:

$$\psi_n = \frac{2}{l} \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} v \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{4v}{\pi} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n c}{l} \sin \frac{\pi n \delta}{l},$$

Решение:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (\omega_n \sim n).$$

Анимация: Файл Task-1.xws ▸ Запустить

Объяснение правила борьбы со старшими обертонами

Для того, чтобы 7-ая гармоника не была слышна, ударяют в крайний узел 7-ой гармоники, то есть $c = \frac{l}{7}$, поскольку тогда

$$\sin\frac{\pi n c}{l} = \sin\frac{\pi n}{7} = 0$$

и в сумме

$$u = \frac{4vl}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n c}{l}\sin\frac{\pi n \delta}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\omega_n t,$$

7-ой член отсутствует.

Сглаживание начального профиля

Поскольку мгновенный профиль начальных скоростей выбран разрывным, задача не имеет классического решения. Кажется, что сглаживание начальных условий может существенно улучшить модель задачи.

Про мгновенный профиль скоростей, придаваемых струне ударом в точке $x = c$ молоточком малой ширины 2δ, с уверенностью можно сказать следующее: скорость равна нулю вне молоточка, то есть при $|x - c| \geq \delta$, имеет единственный максимум v при $x = c$ и распределена симметрично относительно $x = c$.

Старшие гармоники

В разложении решения в ряд Фурье

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \omega_n t \sin \frac{\pi n}{l} x$$

амплитуды старших гармоник меняются радикально, поскольку для гладких функций φ коэффициенты Фурье убывают быстрее любой степени $1/n$.
Это и гарантирует существование классического решения.

Оценки для коэффициентов Фурье

По теореме о среднем коэффициент Фурье

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int_{c-\delta}^{c+\delta} \psi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\sin\frac{\pi n \xi_n}{l}\int_{c-\delta}^{c+\delta}\psi(x)dx$$

где ξ_n – точка отрезка $(c-\delta, c+\delta)$. По теореме о конечных приращениях

$$\left|\sin\frac{\pi n \xi_n}{l} - \sin\frac{\pi n c}{l}\right| \leq \frac{\pi n}{l}\delta,$$

поэтому ψ_n отличается от «среднего» коэффициента

$$\overline{\psi}_n = \frac{4}{l}\sin\frac{\pi n c}{l}\int_0^{c+\delta}\psi(x)dx$$

на величину

$$4\pi v\left(\frac{\delta}{l}\right)^2 n.$$

Младшие гармоники

Если толщина молоточка мала, то и амплитуды младших гармоник в разложении решения в ряд Фурье

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \omega_n t \sin \frac{\pi n}{l} x$$

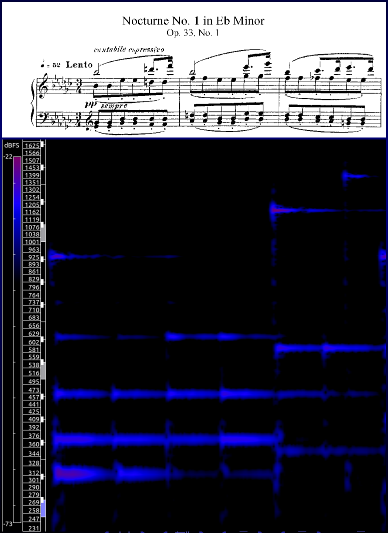
мало отличаются от вычисленных выше амплитуд гармоник для разрывной ψ.
В тех задачах, в которых важен не мгновенный профиль струны, а спектральный состав ее колебаний, все равно, как именно распределяется начальная скорость от точки удара к краям молоточка и можно довольствоваться решением в виде ряда Фурье, которое называют *обобщенным решением* уравнения колебаний.

Музыкальный диктант

Оконные преобразования Фурье позволяют выделять синусоиды в записях музыкальных произведений, нужно лишь брать T много большим периода колебаний струн, но много меньше интервала между нажатиями нот. В этом случае на участках времени длины $2T$ график будет представлять собой сумму конечного числа синусоид и лишь в момент нажатия новых клавиш на графике F будет появляться «грязь», сам момент нажатия можно опять же определить с точностью до величины порядка T.

Сонограмма первого такта ноктюрна Г. Форе.

Файл Faure.mp3 Запустить
Любопытно отметить, что в первой четверти первого такта ми бемоль второй октавы отсутствует в нотах, но появляется в спектрограмме как обертон к ми бемоль первой октавы.



Вопрос № 2.

Корректность задачи о возбуждении колебаний струны

Классическое решение

Определение

Классическим решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l,\, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

называют функцию, которая

- дважды непрерывно дифференцируема функцию в области $\{0 < x < l$ и $t > 0\}$ и там удовлетворяет уравнению $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ и
- непрерывна вмести со своими первыми производными в замыкании этой области $\{0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0\}$ и на границах удовлетворяет указанным начальным и граничным условиям.

Корректность задачи и метод Фурье

Определение

Задача называется корректной по Адамару, если

- ее решение единственно,
- ее решение существует и
- ее решение устойчиво относительно малых изменений входных данных.

Хотя метод Фурье позволяет конструктивно находить решения задачи, сказанное выше в его обоснование не дает возможности судить о ее корректности: мы пока не доказали, во-первых, что эта задача не допускает другого решения, которое не было бы суперпозицией гармоник, во-вторых, что ряды Фурье доставляют классическое решение этой задачи, а на примерах убедились в обратном.

Единственность решения

Теорема

Задача о колебаниях струны допускает не более одного классического решения.

Для доказательства следует рассмотреть разность w двух классических решений и, вычислив производную по t выражения

$$E(t) = \int\limits_0^l (w_t^2 + a^2 w_x^2)dx,$$

доказать, что

$$\int\limits_0^l (w_t^2 + a^2 w_x^2)dx = 0.$$

Существование решения

Теорема

Пусть начальные функции удовлетворяют след. условиям:

- функция φ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $0 < x < l$ и имеет на нем кусочно-непрерывную третью производную,
- функция ψ непрерывно дифференцируема на том же отрезке и имеет на нем кусочно-непрерывную вторую производную, и
- на концах этого отрезка верно

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Тогда задача о возбуждении колебаний струны корректно поставлена.

Доказательство теоремы существования

Существенную часть доказательства этой теоремы составляет обоснование сходимости рядов Фурье и возможности их почленного дифференцирования. См. [2], гл. VII, §2-4.
По ходу доказательства получается, что единственное классическое решение можно найти по методу Фурье.

Об условиях теоремы существования

Предположение о гладкости начальных данных кажутся вполне естественными, равно как и условия

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0,$$

означающие лишь, что в начальный момент концы струны неподвижны. Условие же

$$\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$$

запрещает струне искривляться возле точек закрепления. Принципиально ли оно или является дефектом доказательства?

Метод Фурье и метод Даламбера

Проблемы с обоснованием сходимости получающихся рядов типичны для метода Фурье, который в дальнейшем будет распространен на куда более сложные задачи.
Метод Даламбера, заметно менее общий и бесполезный, напр., для задач музыкальной акустики, позволяет в данном случае взглянуть на эту проблему с другой стороны.

Корректность задачи и метод Даламбера

Теорема

Если функция φ, заданная на отрезке $0 < x < l$, допускает дважды дифференцируемое нечетное $2l$-периодическое продолжение на всю вещественную ось Ox, то задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < l,\, t > 0) \\ u\big|_{t=0} = \varphi, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

имеет и притом единственное классическое решение, которое дается формулой Даламбера

$$u = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}.$$

Доказательство существования решения

Функция

$$u = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}$$

удовлетворяет уравнению колебаний и начальным условиям, если φ является 2-жды дифференцируемой функцией на всей вещественной прямой. На концах отрезка $0 < x < l$ верно

$$u|_{x=0} = \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} = 0$$

в силу нечетности продолжения, и

$$u|_{x=l} = \frac{\varphi(l - at) + \varphi(l + at)}{2} = \frac{\varphi(l - at - 2l) + \varphi(l + at)}{2}$$
$$= \frac{\varphi(-(at + l)) + \varphi(l + at)}{2} = 0$$

в силу его $2l$-периодичности.

Условия теоремы существования

Для того, чтобы продолжение было 2-жды непрерывно-дифференцируемой функцией, необходимо и достаточно, чтобы таковой был начальный профиль $u = \varphi$ на отрезке $(0 \le x \le l)$ и чтобы он удовлетворял условиям

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0.$$

Это утверждение в одну сторону составляет существенную часть теоремы существовании решения и теперь вполне очевидно, что условие $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ не является случайным дефектом в доказательстве этой теоремы. Однако, может быть, в этом случае имеется классическое решение, которое не может быть найдено методом Даламбера?

Обращение теоремы существования

Пусть теперь, наоборот, известно, что задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < l,\ t > 0) \\ u\big|_{t=0} = \varphi, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

имеет классическое решение u. Это решение, будучи дважды дифференцируемой как функцией x, можно разложить в сходящийся ряд Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l},$$

коэффициенты которого выражаются интегралами:

$$u_n(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l u(x,t) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Дифференциальное уравнение для коэффициентов

Этот ряд нельзя подставить в уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, поскольку u_{xx} всего лишь непрерывна и о поточечной сходимости ее ряда Фурье нам ничего не известно.
Однако коэффициенты u_n отыскать все равно можно. Для этого умножим уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ на $\frac{2}{l} \sin \frac{\pi n x}{l}$ и проинтегрируем от 0 до l.

Вычисления

Член u_{tt} даст

$$\frac{2}{l}\int\limits_0^l u_{tt}\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{d^2 u_n}{dt^2}.$$

Член u_{xx} даст

$$\begin{aligned}\frac{2}{l}\int\limits_0^l u_{xx}\sin\frac{\pi n x}{l}dx &= \frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{\partial u_x}{\partial x}\sin\frac{\pi n x}{l}dx \\ &= \frac{2}{l}u_x\sin\frac{\pi n x}{l}\Big|_{x=0}^{l} - \frac{2}{l}\frac{\pi n}{l}\int\limits_0^l \frac{\partial u}{\partial x}\cos\frac{\pi n x}{l}dx \\ &= \frac{2}{l}\frac{\pi n}{l}u\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_{x=0}^{l} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n.\end{aligned}$$

Задача Коши для коэффициентов

Из уравнения в ч.п. получается оду для коэффициентов:

$$\ddot{u}_n + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 u_n = 0.$$

Умножив начальные условия

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = 0$$

на $\frac{2}{l} \sin \frac{\pi n x}{l}$ и проинтегрируем от 0 до l, получим

$$\frac{2}{l} \int\limits_0^l u(x,0) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \varphi_n, \quad \frac{2}{l} \int\limits_0^l u_t(x,0) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = 0$$

то есть $u_n(0) = \varphi_n$ и $\dot{u}_n(0) = 0$.

Всеобщность метода Фурье

Начальная задача для u превращается в задачу Коши для u_n

$$\{\ddot{u}_n + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 u_n = 0,\ u_n(0) = \varphi_n,\ \dot{u}_n(0) = 0$$

которая имеет единственное решение

$$u_n = \varphi_n \cos\frac{\pi n a t}{l}.$$

Классическое решение, если оно вообще существует, дается рядом Фурье

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\frac{\pi n a t}{l} \sin\frac{\pi n x}{l},$$

то есть *метод Фурье приводит к верному решению всяки раз, как это решение существует.*

Всеобщность метода Даламбера

Частичную сумму ряда Фурье можно преобразовать к

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\varphi_n\left(\sin\frac{\pi n(x+at)}{l}+\sin\frac{\pi n(x-at)}{l}\right)$$

и переписать как

$$\frac{\varphi_N(x-at)+\varphi_N(x+at)}{2},$$

причем частичные суммы

$$\varphi_N(x)=\sum_{n=0}^{N}\varphi_n\sin\frac{\pi nx}{l}$$

сходятся к периодическому продолжению $\varphi(x)$, если предположить, что эта функция удовлетворяет признаку Дирихле.

Всеобщность метода Даламбера-2

Вывод: *метод Даламбера приводит к верному решению всяки раз, как это решение существует*. Более того, если периодическое продолжение $\varphi(x)$ имеет изломы, то задача не может иметь классического решения.

Итог

На трех прошедших семинарах мы учились решать начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l,\, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Мы доказали ее корректность, научились выписывать решение двумя методам и – методом Фурье и методом Даламбера. Познакомились со азами музыкальной акустики. Научились пользоваться системой компьютерной алгебры `Giac` и сонографом `Sonic Visualiser`.

Домашняя работа

Выполненную домашнюю работу следует собрать в один pdf-файл и послать по адресу `mmph@narod.ru`, указав в теме письма номер группы. В ответ придут замечания и комментарии. После одной такой итерации работа будет *опубликована* на сайте `http://mmph.narod.ru`.

Домашняя задача № 1

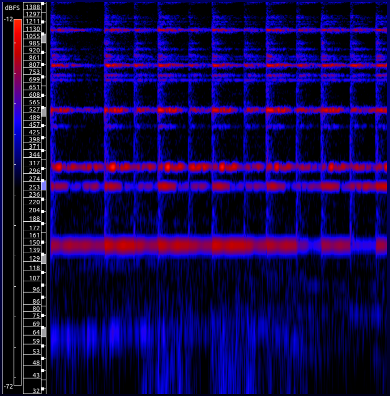
1. Какие условия теоремы существования классического решения нарушены в примерах № 1 и 2, рассмотренных на первом семинаре?
2. Выполнены ли условия теоремы существования классического решения для задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < l,\ t > 0) \\ u|_{t=0} = \sin^2 \frac{\pi x}{l}, \quad u_t|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \end{cases} \qquad ?$$

Домашняя задача № 2

Файл Kolokol.mp3 ▸ Запустить

В этот файл записан колокольный звон. Чем принципиально отличаются спектры струны и колокола, т.е. одномерного и двумерного объектов?



Ссылки

- Музыкальная акустика. Под ред. *Н.А. Грабузова*. М.: Музгиз, 1954.
- *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физики. Подойдет любое издание, напр., М.: «Наука», 2004 г.
- *Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Задачи по математической физики. Изд-во МГУ, 1994.
- *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Подойдет любое издание, напр., 6-е изд. М., Изд-во МГУ, 1999.

Конец семинара № 3

На слайде 23 использована запись фрагмента ноктюрна Г. Форе (Op. 33, no. 1) в исполнении Ж.-Ф. Колара (Jean-Philippe Collard, запись 1973 г.).